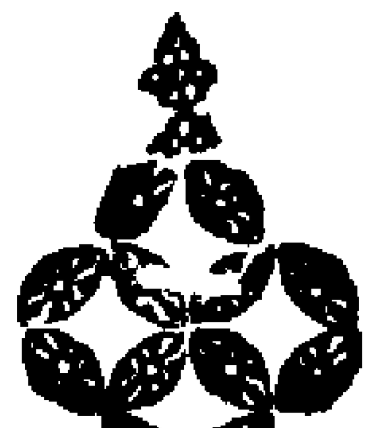
UNIVERSAL
LIBRARY

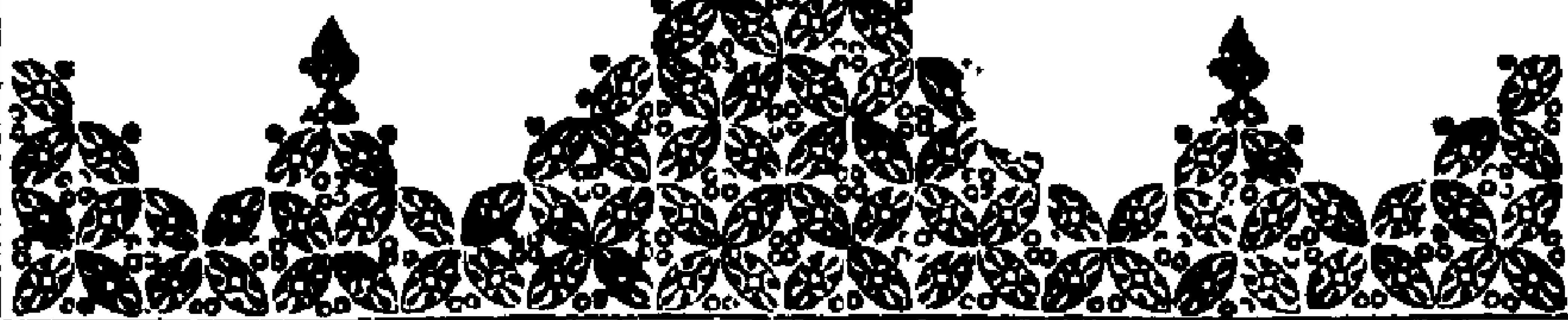
هذا كتاب التحفة العزيزية

في تهذيب الاصول

الهندسية







الحمد لله مبدع المخلوقات العالم بما كان وما هو كائن وما هو آت مخترع الاشياء فى غاية الاتقان ومبرزها من خفاء العدم الى ظهور العيان جعلها فى غاية الاحكام فبهرت العقول بما فيها من بديع الانتظام ان فى ذلك لآيات لاولى الالباب وارشادا عن ليل الخطاء الى نهار الصواب والصلاة والسلام على قطب دوائر الوجود ومطلع شمس التقى والجود مسقط نقطة قلم الالهيات ومنبع الحكم والرياضيات محمد المبعوث باشكال الفضائل المؤيد باقوى البراهين والدلائل وعلى آله اولى القوة واليقين المنزهين عن كل عرض يشين ثم الدعاء لحضرة صاحب الحزم والرأى السديد مولى الديار المصرية الصدر السعيد مركز دائرة الملك اوحد من تقلب على متون الجياد والملك القائم على منشور بسيطة العدل فى تلك الديار التى بلغت بهمته الغاية القصوى فى الفضل أيد الله احكامه وثبت على صراط الصدارة اقدامه وبعد فيقول الفقير الى رحمة المعيد المبدى

على

علي عزت أفندى لما امرنى من اجابه السعد بليك ناظر المدارس الثلاث
على مبارك بيك ان الخص كتابا فى أصول الهندسة تكون عبارانه على
السهولة مؤسسة ويكون مهذب المعانى جيد التركيب والمبانى ينتفع
به القاصى والدانى ويكون واسطة فى جعل تعليم الهندسة العادية
جاريا على ترتيبه بالمهندسخانة الخديوية قابلت أمر حضرته بالامتثال
واحتفلت به كل الاحتفال واعتنيت بجمع هذا الكتاب ليكون عمدة
لذوى الالباب وانتخبته من كتب شتى منها كتاب اقليدس الشهير
وكتاب لاقوروا صاحب الفهم الغزير وكتاب الشهير فراتكور وكتاب
المهندس ونسن صاحب الفهم الأنور وكتاب الشهير ليونى اشهر مؤلف
ومنشى وكتاب الشهير بلانسين المعروف الذى تأليفه بالسلامة
موصوف وكتاب الشهير بلانشى وغير ذلك من المؤلفات الفرنساوية
المفيدة ذوات العقود الفريدة وكان عمدتى فى هذا التأليف كتاب جديد
فى أصول الهندسة جامع لما شيد مبانيه كل مهندس من القدماء وأسسه
وقد اهتم بتأليف هذا الكتاب الاخير المهندس لژاندر الفرنساوى الشهير
فيلسوف زمانه وفريد نظرائه واقرانه وذلك لما اشتمل عليه من كثرة
المعانى وقلة الالفاظ والمبانى مع ما اختص به من حسن الترتيب
وسهولة الاسلوب الغريب ولذلك طبع بمدينة باريس أربعة عشر مرة
بزيادة التحسين والتهذيب فى كل مرة وكانت الطبعة الرابعة عشر منه
فى سنة ١٨٤٥ مسيحية الموافقة لسنة ١٢٦١ هجرية فاخذت منه ومن كل كتاب
ما حسن وطاب وحذفت ما لا حاجة اليه ولا معول فيما نحن بصدده عليه
ورتبته ترتيبا يسر الخاطر ويروق الناظر وغيرت فى هذا الكتاب النافع
للمقيم والمسافر مبحث الخطوط المتوازية ومبحث تماس محيطات الدوائر
واجتهدت فى تسهيل براهينه على قدر الامكان وامعنت النظر فيه كل
الامعان واضفت للمقالة الثالثة دعاوى نظرية ضرورية فى العلوم النظرية
والعملية وفى تطبيق العلوم الرياضية على العلوم الطبيعية لاسيما فى الخواص

الهندسية للاشعة الضوئية واضفت الى عمليات هذه المقالة لتكميل المعنى دعاوى عملية أخرى عنها لا يستغنى واضفت الى ذلك ما جاد به فكرى من الامثلة المفيدة ذوات المنافع العديدة وشرحتها عقب الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة من الاصول الهندسية حتى يتوصل بها الى فهم ما يرام فى هذا الغرض البعيد المرام وجعلت للمقالة الرابعة التى هى اهذه المقالة الثالثة تابعة تطبيقات مفيده مبنية على فوائد جديده بعضها مشروح فى الدعاوى المشهورة وبعضها مشروح عقب المقالة الرابعة المذكورة وجعلت كلما ينسب الى كل مقالة من الاشكال منفردا عما عداه دفعا للالتباس والاشكال واجتهدت فى تحرير ألفاظه ومبانيه وتهذيب عباراته ومعانيه وكنت اعرض كلما ترجمته أوالفته وجمعته وحررته على حضرة الشيخ ابراهيم الدسوقى صاحب الفهم الثاقب والاجتهاد الحقيقى فجاء بحمد الله وافيا بالمراد شافيا غلة الصاد شاهدا لايام ولى النعم صاحب الدولة والهمم بانها غرر فى جباه العصور خلد الله ملكه الى البعث والنشور ولما تهيأ للتمام والبس وشاح الختام وسمه مصححه بالنخبة العزية فى تهذيب الاصول الهندسية والله الموفق للصواب واليه المرجع والمآب

(فى الاصول الهندسيه)

المقالة الاولى فى خواص الخطوط المستقيمة وتساوى المثلثات وخواص الشكل الرباعى

(حدود)

(حد ١) الجسم ماله أبعاد ثلاثة هى الطول والعرض والعمق أى السمك

(حد ٢) الحيز هو الفراغ الذى يشغله الجسم

(حد ٣) سطح الجسم هو الحد الفارق بينه وبين المحيط به الملاصق وبعبارة اخرى ماله طول وعرض فقط

(حد ٤) الخط ملتقى سطحين وبعبارة اخرى هو طول فقط

(حد ٥) النقطة ملتقى خطين

(حد ٦) كل من الجسم والسطح والخط يعتبر مجردا عن المادة

(حد ٧) يطلق اسم الشكل على الجسم وعلى السطح وعلى الخط

(حد ٨) موضوع الهندسة الاشكال من حيث مساحة امتدادها ومعرفة خواصها

(حد ٩) الخط المستقيم اقرب بعد بين نقطتين مثاله الخط ا ب من (الشكل ١)

(حد ١٠) الخط المنكسر خط مركب من خطوط مستقيمة ليست على استقامة واحدة مثاله الخط ا ح ء ب من (الشكل ١)

(حد ١١) الخط المنحنى ماليس مستقيما ولا منكسرا مثاله الخط ا هـ ب من (الشكل ١)

(حد ١٢) المستوى كل سطح امكن تطبيق المستقيم عليه فى سائر جهاته وبعبارة اخرى هو سطح اذا اخذ فيه نقطتان بالاختيار ووصل بينهما بمستقيم انطبق هذا المستقيم عليه انطباقا تاما

(حد ١٣) السطح المنحنى ماليس مستويا ولا مركبا من سطوح مستوية

(حد ١٤) الزاوية مسافة واقعة بين مستقيمين متقاطعين وبعبارة

اخرى هى الانفراج الكائن بين مستقيمين متقاطعين ونقطة التقاطع تسمى رأس الزاوية والمستقيمان يسميان ضلعاها مثالها الزاوية ب ا ح المرسومة فى (الشكل ٢) فالنقطة ا تسمى رأس الزاوية وكل من المستقيمين ا ب و ا ح يسمى ضلعها والزاوية تميز تارة بحرف الرأس وتارة بثلاثة حروف بشرط أن يذكر حرف الرأس فى الوسط فان كانت مفردة كفى لتمييزها حرف الرأس وان كانت مركبة من زاويتين فاكثر وجب تمييزها بالحروف الثلاثة

والزاويتان المتساويتان زاويتان اذا وضعت احداهما على الاخرى انطبقت عليها انطباقا كليا

اذا احتوت زاوية مثل ا على زاويتين كلتاهما مساوية لزاوية اخرى كالزاوية د يقال ان الزاوية ا ضعف الزاوية د فاذا احتوت على ثلاث زوايا كذلك يقال ان الزاوية ا ثلاثة امثال الزاوية د وهكذا فالزوايا قابلة للمقارنة ببعضها كبقية المقادير

(حد ١٥) الزاوية القائمة هى احدى الزاويتين المتجاورتين المتساويتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر مثالها الزاوية ب ا ح أو ب ا د كما فى (الشكل ٣)

والزاوية المنفرجة هى ما كانت اكبر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية د ه و من (الشكل ٤)

والزاوية الحادة هى ما كانت اصغر من الزاوية القائمة مثالها الزاوية ب ا ا من (الشكل ٤)

(حد ١٦) المستقيم العمود على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين متساويتين مثاله المستقيم اب من (الشكل ٣)

(حد ١٧) المستقيم المائل على مستقيم هو ما يصنع معه زاويتين متجاورتين غير متساويتين مثاله المستقيم حد من (الشكل ١٧)

(حد ١٨) الزاويتان المتممتان لبعضهما هما زاويتان مجموعهما يساوى

زاويتين

زاويتين قائمتين

(حد ١٩) الزاويتان التماميتان هما زاويتان مجموعهما يساوى زاوية قائمة

(حد ٢٠) الخطان المتوازيان خطان مستقيمان فى مستو واحد اذا امتدا لا يلتقيان اصلا مثال ذلك ا ب و ح د من (الشكل ٥)

(حد ٢١) الشكل المستوى سطح مستو محدد من جميع جهاته بخطوط لكن اذا كانت تلك الخطوط مستقيمة فالمسافة المحددة بتلك الخطوط تسمى شكلا مستقيم الخطوط اومستقيم الاضلاع اومضلعا مستويا فجملة الخطوط المذكورة تكون محيط الشكل أو أطرافه كما فى (الشكل ٦)

(حد ٢٢) ابسط الاشكال المستقيمة الاضلاع ماله ثلاثة اضلاع ويسمى مثلثا وماله اربعة اضلاع يسمى ذا اربعة اضلاع أوشكلا رباعيا وماله خمسة اضلاع يسمى مخمسا أوشكلا خماسيا وماله ستة يسمى مسدسا أوشكلا سداسيا وهكذا

(حد ٢٣) المثلث المتساوى الاضلاع ما كانت اضلاعه متساوية كما فى (الشكل ٧)

والمثلث المتساوى الساقين ما كان فيه ضلعان متساويان فقط كما فى (الشكل ٨)

والمثلث المختلف الاضلاع ما كانت اضلاعه مختلفة كما فى (شكل ٩)

(حد ٢٤) المثلث القائم الزاوية ما كانت احدى زواياه قائمة والضلع المقابل لها يسمى وترها فالمثلث ا ب ح القائم الزاوية ا يسمى مثلثا قائم الزاوية والضلع ب ح يسمى وتر القائمة كما فى (الشكل ١٠)

(حد ٢٥) الشكل الرباعى انواع وهى المتوازى الاضلاع والمعين والمستطيل والمربع والمنحرف وشبه المنحرف أما المتوازى الاضلاع فهو ما كانت اضلاعه المتقابلة متوازية سواء كانت اضلاعه المجاورة متساوية اوغير متساوية وسواء كانت زواياه قائمة اوغير قائمة كما فى (الشكل ١٣)

وأما المعين فهو متوازى اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه غير قائمة كما فى

(الشكل ١٤)

وأمّا المستطيل فهو متوازى اضلاع زواياه قائمة واضلاعه المتجاورة مختلفة كما فى (الشكل ١٢)

وأمّا المربع فهو متوازى اضلاع اضلاعه متساوية وزواياه قائمة كما فى (الشكل ١١)

وأمّا المنحرف فهو شكل رباعى أضلاعه المتقابلة غير متوازية

وأمّا شبه المنحرف فهو شكل رباعى فيه ضلعان متوازيان فقط كما فى (الشكل ١٥)

(حد ٢٦) قطر الشكل خط مستقيم موصول بين رأسى زاويتين غير متجاورتين من زواياه كالخط ا ح من (الشكل ٤٢)

(حد ٢٧) كثير الاضلاع ان كانت اضلاعه متساوية يسمى متساوى الاضلاع وان كانت زواياه متساوية يسمى متساوى الزوايا

(حد ٢٨) الشكلان المتساويا الاضلاع شكلان اضلاعهما المتناظرة متساوية وموضوعة على نظم واحد اى أننا اذا تتبعنا محيطيهما فى جهة واحدة شاهدنا الضلع الاول من احدهما مساويا للاول من الآخر والثانى من الاول مساويا للثانى من الآخر والثالث للثالث وهكذا والشكلان المتساويا الزوايا شكلان زواياهما المتناظرة متساوية وموضوعة على ترتيب واحد أى أن الزاوية الاولى من احدهما مساوية للاولى من الآخر والثانية من الاول مساوية للثانية من الآخر والثالثة للثالثة وهكذا والاضلاع المتساوية تسمى بالاضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية تسمى بالزوايا المتناظرة

(حد ٢٩) كثير الاضلاع المحدب شكل موضوع بتمامه فى جهة واحدة من امتداد اى ضلع من اضلاعه

ومحيط اى مضلع محدب لايمكن أن يقطعه اى مستقيم فى اكثر من نقطتين

(تنبيه)

المقالات

المقالات الاربع الاول يبحث فيها عن الاشكال المستوية وعن الخطوط المرسومة على السطح المستوى

(بيان الاصطلاحات والعلامات المشتملة عليها هذه الاصول)

ضروريات العلم قضاياه البينة بنفسها أى التى لا تحتاج الى برهان

الدعوى النظرية هى القضية التى لا تتضح حقيقتها الا بواسطة البرهان العقلى

الدعوى العملية هى المسئلة التى يراد حلها بالعمل

الفائدة هى القضية المعينة على اثبات دعوى نظرية او مسئلة

القضية اسم يطلق على الدعوى النظرية والعملية والفائدة

النتيجة هى الثمرة التى تظهر من قضية او جملة قضايا تقدمت

التنبيه ما يفهم منه فائدة الدعوى التى تقدمت وارتباطها بغيرها وغايتها

الفروض هى الموضوعات التى تفرض فى تقرير قضية او فى اثناء برهان.

(العلامات)

هذه العلامة $=$ تسمى علامة التساوى فكتابة ا $=$ ب معناها ا تساوى ب

ولبيان أن مقدار ا اصغر من مقدار ب يكتب ا $<$ ب

ولبيان ان ا اكبر من ب يكتب ا $>$ ب

وهذه العلامة $+$ هى علامة الزيادة وتدل على الجمع وهذه العلامة $-$ هى علامة النقصان وتدل على الطرح فكتابة ا $+$ ب تدل على حاصل جمع كميتى ا و ب وكتابة ا $-$ ب تدل على فرقهما اى على الباقى من طرح الكمية ب من الكمية ا وكتابة ا $-$ ب $+$ ح أو ا $+$ ح $-$ ب تدل على انه ينبغى جمع ا و ح وطرح ب من حاصل جمعهما

وهذه العلامة $\times$ تدل على الضرب فكتابة ا $\times$ ب تدل على الحاصل

من ضرب ا فى ب وقد نستعمل نقطة بدل علامة الضرب هذه ×
فكتابة ا × ب ككتابة ا.ب وقد يكتب الحاصل المذكور أيضا
بدون علامة متوسطة بين المضروب والمضروب فيه هكذا ا ب
وكتابة ا × (ب + ح − د) تدل على حاصل ضرب ا فى كمية ب
+ ح − د واذا اريد بيان حاصل ضرب ا + ب فى ا − ب
+ ح يكتب هكذا
(ا + ب) (ا − ب + ح) فكلما حصر بين قوسين يعتبر كمية
واحدة فقط

لبيان ان الخط ا ب مكرر ثلاث مرات يكتب ٣ ا ب ولبيان اخذ نصف
زاوية ب يكتب ½ ب ويستدل على مربع الخط ا ب بهذه العلامة
ا ب^٢ وعلى مكعبه بهذه ا ب^٣ وسيتضح مربع الخط ومكعبه فى محله
هذه العلامة √ تدل على استخراج الجذر فكتابة √٩ تدل على ان
المطلوب جذر المربع ٩ وهو ٣ وكتابة √(ب × ح) تدل على ان
المطلوب جذر حاصل ضرب ب × ح اى على الوسط المتناسب الهندسى
بين ب و ح

(ضروريات العلم)

(١) المقداران المساويان لمقدار واحد متساويان

(٢) الكل اعظم من جزئه

(٣) الكل يساوى مجموع اجزائه

(٤) لا يمكن وصل خطين مستقيمين بين نقطتين

(٥) الشيئان يكونان متساويين اذا امكن انطباق احدهما على الآخر انطباقا تاما سواء كان هذان الشيئان خطين او سطحين او جسمين

(٦) الاشياء المتساوية اذا اضيف لها اشياء متساوية كانت الحواصل متساوية

(٧) الاشياء المتساوية اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقى متساوية

(٨) الاشياء المتساوية اذا ضربت فى اشياء متساوية كانت الحواصل متساوية

(٩) الاشياء المتساوية اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج متساوية

(١٠) الاشياء المختلفة اذا اضيف لها اشياء متساوية كانت الحواصل غير متساوية

(١١) الاشياء المختلفة اذا طرح منها اشياء متساوية كانت البواقى غير متساوية

(١٢) الاشياء المختلفة اذا ضربت فى اشياء متساوية كانت الحواصل مختلفة

(١٣) الاشياء المختلفة اذا قسمت على اشياء متساوية كانت النواتج غير متساوية

(١٤) الاشياء المختلفة اذا اضيف لها اشياء مختلفة الاصغر للاصغر والاكبر للاكبر كانت الحواصل مختلفة اى يكون مجموع الاشياء الصغرى اصغر من مجموع الاشياء الكبرى

(١٥) اذا وجد خط مستقيم غير محدود فى مستو واحد وكانت نهايتا الخط فى جهتين مختلفتين من هذا المستقيم قطعه بالاول فى نقطة واحدة

(الدعوى الاولى النظرية شكل ح)

كل مستقيمين اشتركا فى نقطتين يتحدان ويصيران مستقيما واحدا اى اذا اشترك مستقيمان فى نقطتين مثل ا و ب فانهما يصيران مستقيما واحدا

وبرهانه ان يقال حيث لا يمكن وصل مستقيمين بين النقطتين ا و ب يتحد الخطان من النقطة ا الى النقطة ب فان قيل انهما قد لا يصيران

مستقيماواحدا اذا امتدابان يصيراحدهما فى الاتجاه ب س والآخر فى الاتجاه ب د يقال لودوّرالخط ا ب د حول النقطة ا حتى وقعت احدى نقطه كالنقطة ه على احدى نقط الخط ا ب س كالنقطة ف لانتقلت النقطة ب عن وضعها الاول وصارت فى نقطة كالنقطة ح وانتقل الخط ا ب ه د فى ا ح ف ع فيلزم عليه امكان وصل مستقيمين بين النقطتين ا و ف وهومحال

(الدعوى الثانية النظرية شكل ١٦)

كل مستقيم يمكن ان يقام من نقطة منه عمود عليه ولا يمكن ان يقام منها عمودان عليه فى جهة واحدة

برهان القضية الاولى ان يقال ليكن ا ب مستقيما ولتكن ح نقطة منه فلو اخذت نقطة خارجة عنه مثل د ثم وصل المستقيم د ح لحدثت زاويتان متجاورتان د ح ا و د ح ب فان كانتا متساويتين كان المستقيم د ح هو العمود المطلوب وان كانتا غير متساويتين بان كانت الزاوية د ح ا اكبر من الزاوية د ح ب فلنتصور فى الزاوية د ح ا زاوية ه ح ا = د ح ب وان الزاوية د ح ه مقسومة الى جزئين متساويين بمستقيم ح ف فهذا المستقيم يكون عمودا على ا ب اعنى ان الزاوية ف ح ا = ف ح ب لان الزاوية ه ح ا = د ح ب عملا والزاوية ه ح ف = د ح ف فيكون ه ح ا + ه ح ف = د ح ب + د ح ف اى ف ح ا = ف ح ب

وبرهان القضية الثانية ان يفرض ان المستقيم ح د عمود على المستقيم ا ب ثم يقال ان اى مستقيم مدّ من النقطة ح كالمستقيم ح ه فى الجهة التى فيها العمود ح د يصنع مع المستقيم ا ب زاويتين متجاورتين غير متساويتين لان الزاوية ا ح د = ب ح د بالفرض والزاوية ا ح ه > ا ح د او > ب ح د والزاوية ب ح د > ب ح ه فتكون زاوية ا ح ه > ب ح ه بمعنى ان المستقيم ح ه ليس عمودا

على

على المستقيم ا ب فاذا لايمكن أن يقام من نقطة واحدة من مستقيم عمودان عليه فى جهة واحدة منه

وينتج من هذه الدعوى أن الزوايا القائمة متساوية

فاذا كان المستقيم ح ى عمودا على المستقيم ا ب والمستقيم ح ط عمودا على المستقيم هـ و تكون القائمة ا ح ى مساوية للقائمة الاخرى هـ ح ط

(برهانه) أن يؤخذ بعد ا ح = هـ ح و ح ب = ح و ثم توضع الزاوية هـ ح ط على الزاوية ا ح ى بان يطبق الضلع هـ ح على الضلع ا ح فتقع النقطة هـ على النقطة ا والنقطة ح على النقطة ح ويقع العمود ح ط على العمود ح ى لانه لا يمكن اقامة عمودين على مستقيم من نقطة واحدة فى جهة واحدة منه فحينئذ تنطبق الزاوية هـ ح ط على الزاوية ا ح ى وتساويها فقد ثبت بهذا أن الزوايا القائمة متساوية

(تنبيه)

ليس المقصود من هذه النتيجة اثبات أن الزاوية ا ح ى تساوى الزاوية المجاورة لها ى ح ب ولا أن الزاوية هـ ح ط تساوى الزاوية ط ح و المجاورة لها لان الزاوية ا ح ى = ى ح ب بمقتضى تعريف الزاوية القائمة ولان الزاوية هـ ح ط = ط ح و بمقتضى التعريف المذكور

بل المقصود اثبات أن اى زاوية قائمة من شكل تساوى القائمة من آخر

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٧)

مجموع الزاويتين المتجاورتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر يساوى زاويتين قائمتين

فاذا تلاقى مستقيم مثل ح ى بمستقيم آخر مثل ا ب فمجموع الزاويتين ا ح ى و ى ح ب يساوى قائمتين اعنى ان ا ح ى + ى ح ب = قائمتين

(برهانه) ان يقام من النقطة ح عمود ح هـ على ا ب فيصير مجموع الزاويتين ى ح ا و ى ح ب مركبا من ثلاث زوايا هى

ه ح ا و ه ح ى و ى ح ب لكن الاولى ه ح ا قائمة ومجموع الزاويتين ه ح ى و ى ح ب يساوى القائمة ه ح ب فحينئذ يكون مجموع الزاويتين ى ح ا و ى ح ب مساويا لقائمتين

وينتج من هذه النظرية

اولا انه اذا كانت احدى الزاويتين المتجاورتين الحادثتين من تلاقى مستقيم بآخر قائمة تكون الاخرى كذلك واذا كانت احداهما حادة تكون الاخرى منفرجة

وثانيا ان مجموع الزوايا المتوالية مثل ا ح ى و ى ح ه و ه ح ف و ف ح ب الخ المرسومة فى جهة واحدة من مستقيم واحد مثل ا ب يساوى قائمتين لان مجموع الزوايا المذكورة يساوى مجموع الزاويتين المتجاورتين ى ح ا و ى ح ب

وثالثا ان مجموع الزوايا المتوالية ا و ب و ب و ح و ح و ى الخ المرسومة حول نقطة و بخطوط مستقيمة متلاقية فى النقطة المذكورة يساوى اربع قوائم كما فى (شكل ٢٢)

لانه اذا امتد من النقطة و مستقيم مثل ف ع يصير مجموع الزوايا المذكورة مركبا من مجموع الزوايا المتوالية ا و ف و ا و ب و ب و ع المرسومة فى جهة واحدة من المستقيم ف ع ومن مجموع الزوايا المتوالية ح و ع و ح و ى و ى و ه و ه و ف المرسومة فى الجهة الاخرى من المستقيم المذكور

(الدعوى الرابعة النظرية شكل ٢٠)

اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين مساويا للقائمتين كان الضلع الخارج من احداهما على استقامة الضلع الخارج من الاخرى

اى اذا كان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ح ى و ى ح ب من الشكل المرقوم مساويا للقائمتين كان الضلع ح ا على استقامة الضلع ح ب لانه لو لم يكن الضلع ح ا على استقامة الضلع ح ب لكان على استقامة ح ك

مثلا

مثلا فيكون ا ح د + د ح ک = قائمتين
والمفروض أن ا ح د + د ح ب = قائمتين فيلزم أن يكون ا ح د + د ح ک = ا ح د + د ح ب وبطرح الزاوية المشتركة ا ح د تبقى الزاوية د ح ک = د ح ب وهو محال لان الزاوية د ح ک جزء من الزاوية د ح ب والجزء لا يساوى الكل فتبين بهذا أن الضلع ح ا على استقامة ح ب
وينتج من هذه النظرية
اولا أن العمودين المخرجين من نقطة واحدة على مستقيم واحد يكونان على استقامة واحدة كما فى (شكل ١٨)
اى اذا اقيم عمودان و ح و و د من نقطة و على مستقيم ا ب يكون العمود ح و على استقامة و د
لان مجموع الزاويتين ا و ح و ا و د المتجاورتين مساو لقائمتين فيكون ح و على استقامة و د
وثانيا أن احد المستقيمين اذا كان عمودا على الآخر كان الآخر عمودا عليه
اى اذا كان المستقيم ح د من الشكل المرقوم عمودا على المستقيم ا ب كان المستقيم ا ب عمودا ايضا على المستقيم ح د
لانه يلزم من كون المستقيم ح د عمودا على ا ب أن تكون الزاوية ا و ح قائمة وأن تكون مجاورتها ا و د كذلك ويلزم من هذا أن يكون المستقيم ا ب عمودا على المستقيم ح د

(الدعوى الخامسة النظرية شكل ٢١)

اذا تقاطع مستقيمان فالزاويتان المتقابلتان برأسيهما تكونان متساويتين
اى اذا تقاطع مستقيمان مثل ا ب و ح د من الشكل المرقوم فالزاويتان ا ه ح و ب ه د تكونان متساويتين اى يكون ا ه ح = ب ه د
لانه يلزم من كون الخط ا ب مستقيما أن يكون
ا ه ح + ح ه ب = قائمتين ومن كون الخط ح د مستقيما أن يكون

ح هـ ب + ب هـ د = قائمتين فيكون
ا هـ ح + ح هـ ب = ح هـ ب + ب هـ د وبطرح الزاوية المشتركة
ح هـ ب تبقى الزاوية ا هـ ح مساوية للزاوية ب هـ د وهو المطلوب اثباته
وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ا هـ د مساوية للزاوية ح هـ ب .

(تنبيه)

اذا كان للزاويتين المتساويتين المتقابلتين برأسيهما ضلعان على خط مستقيم واحد وكانت احداهما في جهة منه مضادة لجهة الاخرى كان الضلعان الآخران كذلك

اى اذا كان الضلعان ح هـ و هـ د على استقامة واحدة وكانت الزاوية ح هـ ا مساوية للزاوية د هـ ب ومضادة لها في الاتجاه يكون الضلع هـ ب على استقامة الضلع هـ ا

(برهانه) أن يقال يلزم من كون المستقيم ا هـ ملاقيا للمستقيم ح د أن يكون مجموع المتجاورتين ح هـ ا و ا هـ د مساويا للقائمتين وحيث ان الزاوية د هـ ب مساوية للزاوية ح هـ ا فرضا يكون مجموع المتجاورتين ا هـ د و د هـ ب مساويا لقائمتين ويلزم من هذا أن يكون الضلع هـ ب على استقامة الضلع هـ ا (كما تقدم في النظرية الرابعة)

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٢٣)

المثلثان يكونان متساويين اذا كان في كل منهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر ومحصورة بين ضلعين كل منهما مساو لنظيره من الآخر

اى اذا كانت الزاوية ا = للزاوية د والضلع ا ب = للضلع د هـ والضلع ا ح = للضلع د و يكون المثلث ا ب ح = للمثلث د هـ و

(برهانه) أنه لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث د هـ و بحيث ينطبق الضلع ا ب على مساويه د هـ لوقعت النقطة ا على النقطة د والنقطة ب على النقطة هـ وحيث ان الزاوية ا = للزاوية د يقع الضلع ا ح

على

على مساويه ى و والنقطة ح على النقطة و فينطبق الضلع ب ح على الضلع هـ و فحينئذ ينطبق المثلث ا ب ح على المثلث ى هـ و فيكونان متساويين وهذا هو المطلوب

و ينتج من هذه النظرية انه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من مثلث ضلعين وزاوية بينهما من مثلث اخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء الاخر

اى اذا كان الضلع ا ب = للضلع ى هـ والضلع ا ح = للضلع ى و والزاوية ا = للزاوية ى تكون الزاوية ب = للزاوية هـ والزاوية ح = للزاوية و والضلع ب ح = للضلع هـ و

(الدعوى السابعة النظرية شكل ٢٣)

يتساوى المثلثان اذا تساوى من كل منهما ضلع والزاويتان المجاورتان له كل لنظيره

اى اذا كان الضلع ب ح مساويا للضلع هـ و والزاوية ب مساوية للزاوية هـ والزاوية ح مساوية للزاوية و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث ى هـ و

(برهانه) انه لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث ى هـ و بحيث ينطبق الضلع ب ح على مساويه هـ و لوقعت النقطة ب على النقطة هـ والنقطة ح على النقطة و وحيث ان الزاوية ب = للزاوية هـ يقع الضلع ا ب على الضلع ى هـ وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط ى هـ وحيث ان الزاوية ح = للزاوية و يقع الضلع ا ح على الضلع ى و وتقع النقطة ا على احدى نقط الخط ى و فحينئذ تقع النقطة ا على النقطة ى وبهذا ينطبق المثلث ا ب ح على المثلث ى هـ و ويساويه وهذا هو المطلوب

نتيجة اذا ساوى ضلع وزاويتان مجاورتان له من مثلث ضلعا وزاويتين مجاورتين له من مثلث آخر كل لنظيره تساوت بقية اجزاء احدهما بقية اجزاء

الاخر كل بنظيره اى اذا كان الضلع ب ح مساويا للضلع هـ و والزاوية ب مساوية للزاوية هـ والزاوية ح مساوية للزاوية و كانت الزاوية ا مساوية الزاوية د والضلع ا ب مساويا للضلع د هـ والضلع ا ح مساويا للضلع د و

(الدعوى الثامنة النظرية شكل ٢٣)

اى ضلع من اى مثلث اصغر من مجموع الضلعين الاخرين واكبر من فاضلهما اى ان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح اصغر من مجموع الضلعين ا ح و ح ب واكبر من فاضلهما

(برهان القضية الاولى) ان الخط المستقيم ا ب اصغر من الخط المنكسر ا ح ب المار بنهايتى المستقيم ا و ب .

(وبرهان الثانية) ان الضلع ب ح < ا ب + ا ح فاذا طرح ا ح من كل من الطرفين بقى ب ح — ا ح < ا ب أى ا ب > ب ح — ا ح وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ٢٤)

اذا اخذت نقطة داخل مثلث ووصل منها الى نهايتى احد اضلاعه مستقيمان فمجموع المستقيمين المذكورين يكون اصغر من مجموع الضلعين الباقيين من المثلث اى اذا اخذت نقطة مثل هـ داخل مثلث مثل ا ب ح ومد منها الى نهايتى الضلع ب ح مستقيمان ب هـ و هـ ح كان مجموع الخطين ب هـ و هـ ح اصغر من مجموع الضلعين ب ا و ا ح

(برهانه) ان يقال لو مد احد المستقيمين ب هـ على استقامته جهة هـ حتى قطع الضلع ا ح فى نقطة مثل د لحدث مثلث ا ب د فيه الضلع ب د < د ا + ا ب اى ب هـ + هـ د < د ا + ا ب وحدث ايضا مثلث ح د هـ فيه الضلع ح هـ < هـ د + د ح فلو جمعت هذه الاشياء غير المتساوية الاصغر للاصغر والاكبر للاكبر لتحصل ب هـ + هـ د + ح هـ < د ا + ا ب + هـ د + د ح فاذا

طرح

طرح الجزء المشترك ه د من كل من الطرفين بقي
ب ه + ه ج < د ا + ا ب + د ج فاذا وضع ا ج عوضا
عن ا د + د ج حدث
ب ه + ه ج < ب ا + ا ج وهو المطلوب

(الدعوى العاشرة النظرية شكل ٢٥)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث آخر وكانت الزاوية التي بين ضلعي المثلث الاول اكبر من الزاوية التي بين ضلعي المثلث الثاني يكون الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثاني

اى اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ج مساويا للضلع د ه من المثلث د ه و والضلع ا ج مساويا للضلع د و والزاوية ب ا ج اكبر من الزاوية د يكون الضلع ب ج اكبر من الضلع ه و

(برهانه) ان ترسم زاوية مثل ج ا ح = الزاوية د ويؤخذ ا ح = د ه ويوصل ج ح فيحدث مثلث ا ج ح = للمثلث د ه و لان الضلع ا ج = د و فرضا والزاوية ج ا ح = الزاوية د عملا والضلع ا ح = د ه كذلك (كما في النظرية السادسة) فينتج من تساوي المثلثين ان الضلع ج ح = ه و فاذا نصفت الزاوية ب ا ح بمستقيم ا س لا يقع هذا المستقيم الا في الزاوية ب ا ج لانها اكبر من الزاوية ج ا ح فحينئذ اذا وصل س ح يكون المثلث ا ب س مساويا للمثلث ا ح س لان الضلع ا ح = للضلع ب ا عملا والزاوية ح ا س = للزاوية ب ا س كذلك والضلع ا س مشترك (كما في النظرية السادسة) وينتج من تساوي هذين المثلثين ان الضلع ب س = ح س

ومن المعلوم ان المثلث ج ح س فيه الضلع ج ح < ج س + ح س
فاذا ابدل الضلع ح س بالضلع ب س كان ج ح < ج س + ب س
لكن ج س + ب س = ج ب فيكون ج ح < ج ب وحيث ان
ج ح = ه و يكون ه و < ج ب أي ج ب > ه و وهو

المطلوب

(تنبيه)

اذا ساوى ضلعان من مثلث ضلعين آخرين من مثلث اخر وكان الضلع الثالث من المثلث الاول اكبر من الضلع الثالث من المثلث الثانى تكون الزاوية التى بين ضلعى المثلث الاول اكبر من الزاوية التى بين ضلعى المثلث الثانى اى اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح مساويا للضلع د ه من المثلث د ه و والضلع ا ح مساويا للضلع د و وكان الضلع ب ح اكبر من الضلع ه و تكون الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و

(برهانه) ان يقال لو لم تكن الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و لكانت اما مساوية لها او اصغر منها فان كانت مساوية لها لزم ان يكون الضلع ب ح مساويا للضلع ه و وهذا مخالف للمفروض وان كانت اصغر منها لزم ان يكون الضلع ب ح اصغر من الضلع ه و وهو ايضا مخالف للمفروض فحينئذ تكون الزاوية ب ا ح اكبر من الزاوية ه د و وهو المطلوب

(الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٢٣)

اذا ساوت اضلاع مثلث اضلاع مثلث اخر كل لنظيره كان المثلثان متساويين اى اذا كان الضلع ا ب من المثلث ا ب ح = للضلع د ه من المثلث د ه و والضلع ا ح = للضلع د و والضلع ب ح = للضلع ه و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث د ه و

(برهانه) ان يقال يلزم من تساوى الاضلاع المتناظرة ان تتساوى الزوايا المتناظرة اى ان تكون الزاوية ا = للزاوية د والزاوية ب = للزاوية ه والزاوية ح = للزاوية و اذ لو لم تكن الزاوية ا مساوية للزاوية د لكانت اما اكبر منها او اصغر منها فان كانت الزاوية ا اكبر من الزاوية د كان الضلع ب ح اكبر من الضلع ه و وهذا مخالف للمفروض وان كانت الزاوية ا اصغر من الزاوية د كان الضلع ب ح اصغر من الضلع ه و وهذا أيضا مخالف للمفروض فتكون الزاوية ا

مساوية

مساوية للزاوية ى و بمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = للزاوية ه وأن الزاوية ح = للزاوية و وحيث ان أجزاء المثلث ا ب ح مساوية لنظائرها من المثلث ى ه و يكون المثلث ا ب ح مساويا للمثلث ى ه و وهذا هو المطلوب

(تنبيه)

قد ظهر من برهان هذه القضية أن الزوايا المتساوية تكون مقابلة للاضلاع المتساوية لان الزاويتين المتساويتين ا و ى مقابلتان للضلعين المتساويين ب ح و ه و

(الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٢٨)

كل مثلث متساوى الساقين زاويتاه المقابلتان لساقيه متساويتان أى اذا كان الساق ا ب مساويا للساق ا ح من المثلث ا ب ح تكون الزاوية ح مساوية للزاوية ب

(برهانه) أن ينصف الضلع ب ح بنقطة مثل ى ويوصل المستقيم ا ى فيكون المثلثان الحادثان ا ب ى و ى ح ا متساويين لان الضلع ا ى مشترك والضلع ا ب = للضلع ا ح فرضا والضلع ب ى = للضلع ى ح عملا (كما فى النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ح = للزاوية ب وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن أى ضلع من اضلاع المثلث غير المتساوى الساقين يصح أن يعتبر قاعدة ورأس الزاوية المقابلة له تسمى رأس المثلث وأما المثلث المتساوى الساقين فقاعدته ضلعه الثالث أى ما دون الساقين

(وينتج من هذه النظرية)

اولا أن كل مثلث متساوى الاضلاع فهو متساوى الزوايا

وثانيا أن المستقيم الواصل من رأس مثلث متساوى الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها ومنصفا لزاوية الرأس لانه يلزم من تساوى المثلثين

ا ب د و ا د ح أن تكون الزاوية ب ا د = للزاوية د ا ح والزاوية ا د ب = للزاوية ا د ح

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٢٩)

اذا تساوى زاويتان من مثلث تساوى الضلعان المقابلان لهما

أى اذا كانت الزاوية ا ب ح = ا ح ب يكون الضلع ا ح = ا ب

(برهانه) أن يقال لو تصورنا مثلثا كالمثلث ا َ ب َ ح َ مساويا للمثلث ا ب ح بحيث يكون الضلع ب َ ح َ = ب ح والزاوية ب َ = ب والزاوية ح َ = ح ثم طبقنا المثلث ا َ ب َ ح َ على المثلث ا ب ح بحيث تقع النقطة ح َ على النقطة ب والنقطة ب َ على النقطة ح لكانت الزاوية ح َ = ح = ب وحينئذ يقع الضلع ح َ ا َ على الضلع ب ا والضلع ب َ ا َ على ح ا وتقع النقطة ا َ على النقطة ا فيكون ا َ ب َ = ا ح ويلزم من هذا أن يكون ا ب = ا ح وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٣٠)

أى مثلث احدى زاويتيه اكبر من الاخرى يكون ضلعه المقابل للكبرى اكبر من ضلعه المقابل للصغرى وبالعكس أى اى مثلث احد ضلعيه اكبر من الآخر تكون زاويته المقابلة للضلع الاكبر اكبر من زاويته المقابلة للضلع الاصغر

(برهان القضية الاولى) أن يقال لتكن الزاوية ح > ب فيكون الضلع ا ب المقابل للزاوية ح اكبر من الضلع ا ح المقابل للزاوية ب

ولبيانه تنشأ زاوية مثل ب ح د مساوية للزاوية ب فيكون المثلث الحادث ب ح د متساوى الساقين أى يكون ب د = د ح وحيث ان الخط المستقيم ا ح اقصر من ا د + د ح و ا د + د ح = ا د + د ب = ا ب يكون ا ب اكبر من ا ح

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الضلع ا ب > ا ح فتكون الزاوية ح المقابلة للضلع ا ب اكبر من الزاوية ب المقابلة للضلع ا ح

اذ لو لم تكن الزاوية ح اكبر من الزاوية ب لكانت اما اصغر منها او مساوية لها فان كانت اصغر منها لزم أن يكون ا ب < ا ح وهذا مخالف للمفروض وان كانت مساوية لها لزم أن يكون ا ب = ا ح وهذا أيضا مخالف للمفروض فاذن يلزم أن تكون الزاوية ح اكبر من الزاوية ب وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل ٩)

النقطة الخارجة عن مستقيم لا يمكن أن ينزل منها عليه الا عمود واحد لا عمودان

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن ب ح خطا مستقيما و ى نقطة خارجة عنه فلو اخذت نقطة منه مثل هـ ووصل المستقيم ى هـ لحدثت زاويتان متجاورتان ى هـ ح و ى هـ ب فان كانتا متساويتين كان المستقيم ى هـ عمودا على المستقيم ب ح وان كانتا غير متساويتين بأن كانت الزاوية ى هـ ب اصغر من الزاوية ى هـ ح تنشأ زاوية مثل ب هـ و = ى هـ ب ثم يؤخذ الضلع هـ و = هـ ى ثم يوصل المستقيم ى و فيكون عمودا على المستقيم ب ح لان المثلث ى هـ ع = للمثلث ع هـ و لان الضلع ى هـ = للضلع هـ و بالعمل والضلع هـ ع مشترك والزاوية ى هـ ع = للزاوية ع هـ و بالعمل (كما فى النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ى ع هـ = للزاوية هـ ع و وأن يكون المستقيم ح ب عمودا على المستقيم ى و فاذن يكون المستقيم ى و عمودا على المستقيم ب ح

(وبرهان القضية الثانية) أن تفرض نقطة مثل ح خارجة عن المستقيم ا ب وأن ح ى عمود عليه ثم يقال ان اى مستقيم مد من النقطة ح الى

أى نقطة من نقط المستقيم ا ب غير النقطة ى لا يكون عمودا عليه فان قيل يمكن تنزيل عمود آخر مثل ح و مثلا قلنا اذا مد ح ى على استقامته بجهة ى ثم اخذ هى = ى ح ثم وصل المستقيم ه و حدث مثلث ه ى و = للمثلث و ح ى لان الضلع و ى مشترك والضلع ه ى = للضلع ى ح بالعمل والزاوية ه ى و = للزاوية و ى ح لقيامهما ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ه و ى مساوية للزاوية ى و ح وحيث ادعى أن ح و عمود على ا ب تكون الزاوية ى و ح قائمة فتكون الزاوية ه و ى كذلك ويلزم من هذا أن يكون مجموع المتجاورتين ح و ى و ى و ه مساويا بالقائمتين وعليه يكون الخط ح و ه مستقيما واحدا مارا بالنقطتين ح و ه المار بهما المستقيم ح ه ويلزم من هذا امكان وصل مستقيمين بين نقطتين وهو محال فتبين بهذا أن مجموع المتجاورتين ح و ى و ى و ه لا يكون مساويا بالقائمتين فحينئذ لا تكون الزاوية ح و ى قائمة بمعنى أن المستقيم ح و ليس عمودا على المستقيم ا ب وهو المطلوب

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٣١)

اذا اخذت نقطة خارج مستقيم وانزل منها عمود ومواثل فاعلم

اولا أن العمود اقصر من كل مائل

وثانيا أن المائلين ذوى البعدين المتساويين عن موقع العمود متساويان

وثالثا أن بعدى المائلين المتساويين عن موقع العمود متساويان

ورابعا أن المائلين ذوى البعدين غير المتساويين ابعدهما عن موقع العمود اطولهما

وخامسا أن المائلين غير المتساويين اطولهما ابعدهما عن موقع العمود

أى اذا اخذت نقطة مثل ا خارج خط مثل ى ه وأنزل منها عمود ا ب ومواثل ا ه و ا ح و ا ى الخ فاعلم

اولا أن العمود ا ب يكون اصغر من كل مائل

وثانيا أن الخطين ا ح و ا ه المائلين المتباعدين عن موقع العمود

يكونان

يكونان متساويين اذا كان البعدان ب ح و ب هـ متساويين

وثالثا ان المائلين ا ح و ا هـ اذا كانا متساويين فالبعدان ب ح و ب هـ يكونان كذلك

ورابعا ان البعد ب ء اذا كان اكبر من البعد ب هـ كان المائل ا ء اطول من المائل ا هـ

وخامسا ان المائل ا ء اذا كان اطول من المائل ا هـ كان البعد ء ب اكبر من البعد ب هـ

(برهان القضية الاولى) أن يمد العمود ا ب على استقامته جهة ب ثم يؤخذ البعد ب و = ا ب ويوصل و ح فيحدث مثلث و ح ب = للمثلث ح ب ا لان الزاوية و ب ح = ح ب ا لقيامهما والضلع ح ب مشترك والضلع و ب = للضلع ب ا بالعمل (كما في النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون الضلع و ح = ح ا لكن في المثلث ا ح و الضلع ا و < ا ح + ح و أى ان ٢ ا ب < ٢ ا ح فاذن يكون ا ب < ا ح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان البعد ح ب = ب هـ بالفرض والضلع ا ب مشترك والزاوية ح ب ا = للزاوية ا ب هـ لقيامهما يكون المثلث ا ب ح = للمثلث ا ب هـ ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون ح ا = ا هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث ان المائل ح ا = للمائل ا هـ يكون المثلث ح ا هـ متساوى الساقين فحينئذ يكون العمود ا ب النازل من رأسه على قاعدته مارا بوسطها أى يكون ح ب = ب هـ وهو المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث ان البعد ب ء > ب هـ يكون المائل ا ء > ا هـ لانه اذا اخذ ح ب = ب هـ ووصل ا ح حدث مثلث و ب ح = للمثلث ب ح ا لان الزاوية و ب ح

= للزاوية ح ب ا لقيامهما والضلع ح ب مشترك والضلع و ب = للضلع ب ا بالعمل (كما فى النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون و ح = ح ا وأيضا اذا وصل و د يحدث مثلث و د ب = للمثلث د ب ا لان الزاوية و ب د = للزاوية د ب ا لقيامهما والضلع د ب مشترك والضلع و ب = للضلع ب ا بالعمل (كما فى النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون و د = د ا لكن ا د + د و > ا ح + ح و أى ٢ ا د > ٢ ا ح أو ا د > ا ح و ا ح = ا ه فيكون ا د > ا ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) أن يقال حيث ان المائل ا د اطول من المائل ا ه يكون البعد د ب اكبر من البعد ب ه لانه لو لم يكن البعد د ب اكبر من البعد ب ه لكان مساويا له أو اصغر منه فان كان مساويا له يلزم أن يكون المائل د ا مساويا للمائل ا ه وهذا مخالف للمفروض وان كان اصغر منه يلزم أن يكون المائل د ا اصغر من المائل ا ه وهو أيضا مخالف للمفروض فاذن يكون البعد د ب اكبر من البعد ب ه وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

اولا أن البعد الحقيقى بين نقطة ومستقيم هو العمود النازل منها عليه لانه تبين أن العمود اصغر من كل مائل مار بها وباى نقطة من نقطه

وثانيا أنه لا يمكن أن يوصل من نقطة الى مستقيم ثلاثة خطوط مستقيمة متساوية لانه تبين أن المائل الابعد عن العمود هو الاطول من المائل الاقرب للعمود المذكور

(الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٣٢)

اذا اقيم عمود على وسط مستقيم محدود فاعلم أولا أن البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود الى نهايتى المستقيم المذكور يكونان متساويين وثانيا أن البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود الى نهايتى المستقيم المذكور

المذكور لا يكونان متساويين

أى اذا اقيم عمود و هـ على وسط مستقيم ا ب محدود بنقطتين ا و ب فان البعدين ا ى و ى ب يكونان متساويين

والبعدين ا ى و ى ب لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان البعد ه ا = ه ب بالفرض يكون المائل ى ا = ى ب والمائل ا و = و ب والمائل ا هـ = هـ ب (كما فى النظرية السادسة عشر)

فتبين بهذا أن البعدين الموصولين من أى نقطة من نقط العمود هـ و الى نهايتى المستقيم ا ب يكونان متساويين

(وبرهان القضية الثانية) أن تفرض نقطة مثل ر خارج العمود هـ و ثم يوصل ر ا و ر ب ثم يوصل ى ب فيكون ا ى = ى ب كما سبق وحيث ان فى المثلث ب ر ى الضلع ب ر < ر ى + ى ب و ى ب = ى ا يكون ب ر < ر ى + ى ا و ر ى + ى ا = ر ا فيكون ب ر < ر ا أى ان البعدين الموصولين من أى نقطة خارج العمود هـ و الى نهايتى المستقيم ا ب لا يكونان متساويين بل القاطع للعمود اطول من الآخر

ويتنج من هذه النظرية

أولا انه اذا كان لمستقيم نقطتان كلتاهما على بعدين متساويين من نهايتى مستقيم آخر كان المستقيم الاول عمودا على وسط الآخر لان المستقيم الذى بهذه المثابة يتحد بالعمود المار بوسط المستقيم المفروض لاشتراكه معه فى نقطتين

وثانيا انه اذا كانت نقطة خارج مستقيم وكان البعدان الواصلان منها الى نهايتيه غير متساويين كانت خارج العمود المار بوسط المستقيم المذكور

لانها لو كانت عليه لكان البعدان الواصلان منها الى نهايتى المستقيم المفروض

متساويين وهذا مخالف للمفروض

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٣٢)

يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى منهما الوتر والزاوية غير القائمة كل لنظيره أى اذا كان الوتر ا ح = للوتر ء و والزاوية الحادة ح = لنظيرتها و يكون المثلث ا ب ح = للمثلث ء هـ و

(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث ا ب ح على المثلث ء هـ و بحيث تقع النقطة ا على النقطة ء والوتر ا ح على الوتر ء و لوقعت النقطة ح على النقطة و وحيث ان الزاوية ح = و يقع الضلع ح ب على الضلع و هـ وكذا النقطة ب على النقطة هـ والا لامكن تنزيل عمودين من النقطة ء على المستقيم و هـ وهو محال فاذن تكون الزاوية ا = للزاوية ء ويكون المثلث ا ب ح = للمثلث ء هـ و وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل يط)

يتساوى المثلثان القائما الزاوية اذا تساوى منهما الوتر وأحد الضلعين المحيطين بالقائمة كل لنظيره

أى اذا كان الوتر ا ح = للوتر اَ حَ والضلع ا ب = للضلع اَ بَ يكون المثلث ا ب ح = للمثلث اَ بَ حَ

(برهانه) أن يقال لو وضع المثلث ا ب ح ملاصقا للمثلث اَ بَ حَ بحيث يتحد الضلع ا ب بالضلع اَ بَ لصار الضلع ح ب على استقامة الضلع حَ بَ لان كلا من الزاويتين المتجاورتين ح ب ا و اَ بَ حَ قائمة ويلزم من كون المائل ح ا = للمائل اَ حَ أن يكون البعد ح ب = للبعد بَ حَ فاذن يكون المثلث ح ا ب = للمثلث اَ بَ حَ وهو المطلوب

المطلوب

(الدعوى العشرون النظرية شكل ك)

اذا نصفت زاوية بمستقيم فاعلم اولا أن العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة من نقطه متساويان

وثانيا أن العمودين النازلين على ضلعيها من أى نقطة خارجة عنه ليسا متساويين

أى اذا نصفت زاوية مثل ب ا ح بمستقيم ا ع فاعلم اولا أن العمودين ب و و ح و النازلين على ضلعيها ب ا و ا ح من أى نقطة من نقط الخط ا ع كالنقطة و يكونان متساويين

وثانيا أن العمودين د هـ و هـ ط النازلين على ضلعيها ب ا و ا ح من نقطة مثل هـ خارجة عن المستقيم ا ع لا يكونان متساويين

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية ب ا و = للزاوية و ا ح فرضا و الوتر ا و مشترك بين المثلث ا و ب القائم الزاوية فى ب والمثلث ا و ح القائم الزاوية فى ح يكون المثلثان متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون البعد ب و = للبعد و ح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن ينزل من النقطة ع عمود ع ل على الضلع ا ح ثم يوصل مستقيم هـ ل فيكون العمود ط هـ اصغر من المائل هـ ل وحيث ثبت فى المثلث هـ ل ع أن الضلع هـ ل < هـ ع + ع ل وأن ع ل = ع د يكون هـ ل < هـ ع + ع د لكن هـ ع + ع د = هـ د فيكون هـ ل < هـ د وحيث ان ط هـ < هـ ل يكون ط هـ < هـ د وهو المطلوب

(تنبيه)

المستقيم المنصف لزاوية هو المحل الهندسى لكل نقطة بعداها عن ضلعى الزاوية متساويان

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل كا)

المستقيمان العمودان على ثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل د ح و هـ و عمودين على مستقيم ثالث مثل ا ب كانا متوازيين

(برهانه) أن يقال لو لم يكونا متوازيين لامكن تلاقيهما فى نقطة مثل ط و يلزم من هذا امكان تنزيل عمودين على مستقيم واحد من نقطة واحدة وهو محال كما تبين (فى النظرية الخامسة عشر)

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل كب)

أى زاوية فهى اكبر من أى ساحة مستطيلة ونعنى بالساحة المستطيلة الساحة غير المحدودة الحادثة من ثلاثة خطوط مستقيمة اثنان منها عمودان على الثالث كالساحة الحادثة من الخطوط ا ب و ب ح و ح ط

(وبرهانه) أن ترسم فى الزاوية القائمة ا ب ح زاوية صغيرة مثل ا ب ى وترسم بجانب هذه الزاوية الصغيرة زاوية ى ب هـ = ا ب ى وبجانب الزاوية ى ب هـ زاوية هـ ب و تساوى الزاوية ى ب هـ وبجانب هذه الزاوية الثالثة زاوية رابعة تساوى الثالثة وبجانب الرابعة خامسة تساويها ثم سادسة تساوى الخامسة وهكذا وبهذه الكيفية يزيد مجموع تلك الزوايا عن الزاوية القائمة ا ب ح

واذا اخذ ب ح = ح ى و ل ى = ى ح و س ل = ل ى وهكذا واقيمت أعمدة ح ط و ى ك و ل م و س ع الخ على ب ح فالساحة المستطيلة ا ب ح ط تساوى الساحة المستطيلة ط ح ى ك لانه لو حركت الاولى حول ح ط وطبقت على الثانية لانطبقت القائمة ب ح ط على القائمة ط ح ى وانطبق المستقيم ب ح على مساويه ح ى ووقعت النقطة ب على النقطة ى ووقعت الزاوية ا ب ح على مساويتها ح ى ك ووقع الضلع ب ا على ى ك وانطبقت الساحة ا ب ح ط على ط ح ى ك وساوتها وبمثل هذا يبرهن على أن الساحة ط ح ى ك مساوية للساحة ك ى ل م وأن هذه مساوية لتاليتها وهكذا وحيث ان مجموع تلك الساحات لا يملأ الزاوية القائمة ا ب ح يظهر أن

الزاوية ا ب د اكبر من الساحة ا ب ح ط بمعنى أنّ إىّ زاوية كبيرة كانت او صغيرة اكبر دائما من أىّ ساحة مستطيلة

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل كب)

أىّ مائل على مستقيم يقطع دائما العمود على المستقيم المذكور

أى اذا كان مستقيم مثل حد مائلا على مستقيم مثل حا وكان المستقيم اب عمودا على حا فان المائل حد والعمود اب يتقاطعان اذا امتدا امتدادا كافيا

(برهانه) أن يقال لو أقيم من النقطة ح عمود حك على حا لحدثت زاوية كحد اكبر من الساحة كحاب ويلزم من هذا أن تخرج هذه الزاوية عن الساحة المذكورة وحيث كان الضلع حك مشتركا بين الزاوية كحد والساحة كحاب يلزم لخروج الزاوية عن الساحة أن يقطع امتداد الضلع الآخر حد من الزاوية احد اضلاع الساحة ولكون حد قاطعا للضلعين حا و حك من اول الامر لا يمكن أن يقطعهما مرة اخرى فاذن يقطع الضلع اب وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كانت الزاوية الحادثة بين المستقيم حا والمستقيم المائل عليه المار بالنقطة ح منفرجة كالزاوية اح هـ مثلا يمدّ المائل حهـ على استقامته جهة ح فتحدث بينه وبين امتداد العمود حك زاوية هَحكَ حادّة اكبر من الساحة بَاحكَ ويلزم من هذا أن الضلع حهَ الذى هو امتداد المائل حهـ يقطع الضلع ابَ الذى هو امتداد العمود اب

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل كج)

اذا اخذت نقطة خارج مستقيم امكن دائما أن يمدّ منها مستقيم يوازى المستقيم المذكور لا اثنان

أى اذا اخذت نقطة مثل و خارج مستقيم مثل اب فاعلم أولا انه يمكن

دائما أن يمد منها مستقيم يوازى المستقيم ا ب

وثانيا أنه لا يمكن أن يمد منها اثنان يوازيان المستقيم المعلوم ا ب

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو انزل من النقطة و عمود مثل و هـ على المستقيم المعلوم ا ب واقيم من النقطة المذكورة و عمود مثل حـ ى على و هـ لكان المستقيم حـ ى موازيا للمستقيم المعلوم ا ب لان المستقيمين حـ ى و ا ب عمودان على مستقيم واحد هـ و وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو مد من النقطة و مستقيم غير حـ ى مثل ط ع لم يكن عمودا على و هـ فيقطع ا ب

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل كد)

المستقيمان الموازيان لثالث متوازيان أى اذا كان مستقيمان مثل حـ ى و هـ و موازيين لثالث مثل ا ب كانا متوازيين

(برهانه) أن يقال لو امكن تلاقيهما فى نقطة مثل م لامكن ان يمد من نقطة واحدة مستقيمان موازيان لثالث وهو محال

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل كه)

كل مستقيم قطع احد متوازيين يقطع الآخر أى ان اى مستقيم مثل هـ و اذا قطع أحد متوازيين مثل ا ب فانه يقطع الموازى الآخر مثل حـ ى

(برهانه) أن يقال لو فرض المستقيم هـ و موازيا للمستقيم حـ ى لامكن أن يمد من نقطة تقاطع المستقيم هـ و بالمستقيم ا ب مستقيمان موازيان للمستقيم حـ ى وقد تقدم أن هذا محال

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل كو)

اى عمود على أحد متوازيين يكون عمودا على الآخر

أى اذا وجد مستقيمان متوازيان مثل ا ب و حـ ى ومستقيم مثل هـ و عمود على المستقيم ا ب كان عمودا أيضا على المستقيم حـ ى فيلزم أن يكون حـ ى عمودا عليه

(برهانه)

(برهانه) أن يقال لو لم يكن حـ د عمودا على هـ و لكان مائلا عليه ويلزم من هذا تلاقيه بالعمود ا ب وهو محال

(تعاريف شكل ٣٨)

اذا قطع مستقيم مستقيمين حدث عن تقاطعه بهما ثمان زوايا اربع منها وهي الكائنة في المسافة التي بين المتوازيين تسمى زوايا داخلة والاربع الاخر تسمى زوايا خارجة

أي اذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا ب و حـ د فالزوايا ا ز ح و ح ز ب و حـ ح ز و ز ح د تسمى زوايا داخلة والزوايا ا ز هـ و هـ ز ب و حـ ح و و و ح د تسمى زوايا خارجة

فأما الزاويتان ا ز ح و ز ح د فتسميان زاويتين متبادلتين داخلتين وكذلك الزاويتان حـ ح ز و ح ز ب

وأما الزاويتان ا ز هـ و و ح د فتسميان زاويتين متبادلتين خارجتين وكذلك الزاويتان هـ ز ب و حـ ح و

وأما الزاويتان ا ز هـ و حـ ح ز فتسميان متناظرتين بالخروج والدخول

وكذلك الزاويتان هـ ز ب و ز ح د والزاويتان ا ز ح و حـ ح و والزاويتان ب ز ح و د ح و

وأما الزاويتان ا ز ح و ز ح حـ المجاورتان للقاطع فتسميان متجانبتين داخلتين وكذلك الزاويتان ب ز ح و ز ح د

وأما الزاويتان ا ز هـ و حـ ح و فتسميان متجانبتين خارجتين وكذلك الزاويتان هـ ز ب و د ح و

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ٣٨)

اذا قطع المستقيم مستقيمين متوازيين فاعلم

أولا أن الزاويتين المتبادلتين متساويتان

وثانيا أن الزاويتين المتناظرتين متساويتان

وثالثا أن الزاويتين المتبادلتين الخارجتين متساويتان

ورابعا أن الزاويتين المتجانبتين الداخلتين متممتان لبعضهما أي ان مجموعهما يساوي قائمتين

وخامسا أن الزاويتين المتجانبتين الخارجتين متممتان لبعضهما

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو نصف البعد ر ح بنقطة مثل ط وانزل منها عمود ط ك على ح د ومد ك ط على استقامته جهة ط حتى لاقى المستقيم ا ب في ب لكان ك ب عمودا على الخط ا ب الموازي للخط ح د لانه قد ثبت في النظرية السابعة والعشرين أن العمود على احد المتوازيين عمود على الآخر فيكون المثلثان الحادثان ك ح ط و ط ر ب قائمي الزاوية ومتساويين لان الوتر ح ط مساو للوتر ط ر بالعمل والزاوية ح ط ك مساوية للزاوية ر ط ب لتقابلهما برأسيهما (كما في النظرية الثامنة عشر) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية ك ح ط مساوية للزاوية ط ر ب وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط = ط ر ب و ط ر ب = ا ر ه لتقابلهما بالرأس تكون الزاوية ك ح ط = ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط = ط ر ب و ك ح ط = و ح د و ط ر ب = ا ر ه تكون الزاوية و ح د = ا ر ه وهو المطلوب

(وبرهان القضية الرابعة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط = ط ر ب وقد علم أن ك ح ط + ط ح د = قائمتين فيكون ط ر ب + ط ح د = قائمتين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الخامسة) أن يقال حيث تبين أن الزاوية ك ح ط = ا ر ه وقد علم أن ك ح ط + ك ح و = قائمتين فيكون ا ر ه +

ك ح و = قائمتين وهو المطلوب

(تنبيه)

المستقيمان المتوازيان المقطوعان بقاطع مائل يتكون من تقاطعه بهما ثمان زوايا منها اربع حادة واربع منفرجة والاربع الاول متساوية والاخر كذلك وكل زاوية من الاربع الاول تتمم أي زاوية من الاربع الاخر

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل كز)

المستقيمان المقطوعان بمستقيم يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان متساويتين

أي ان أي مستقيمين مثل ا ب و حـ د اذا قطعهما ثالث مثل هـ و يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ب ر ح و ر ح حـ متساويتين

(برهانه) أن يقال لو نصف البعد ر ح بنقطة مثل ط وانزل منها عمود مثل ط ك على حـ د ومد العمود على استقامته جهة ط حتى لاقى المستقيم ا ب في نقطة مثل ى لحدث مثلثان متساويان ك ح ط و ط ر ى لان الضلع ح ط = للضلع ط ر بالعمل والزاوية ك ح ط = للزاوية ط ر ى فرضا والزاوية ك ط ح = ى ط ر لتقابلهما بالرأس (كما في النظرية السابعة) ويلزم من تساوي هذين المثلثين أن تكون الزاوية ر ى ط = للزاوية ط ك ح لكن الزاوية ط ك ح قائمة بالعمل فيلزم أن تكون الزاوية ر ى ط كذلك ويلزم من هذا أن يكون المستقيم ا ب عمودا على المستقيم ك ى وأن يكون موازيا للمستقيم حـ د لانه تبين في النظرية الحادية والعشرين أن المستقيمين العمودين على ثالث متوازيان وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان متساويتين

أى اذا كانت الزاويتان المتبادلتان الخارجتان ا ر هـ و د ح و متساويتين يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاوية ا ر هـ = ب ر ح بالتقابل والزاوية د ح و = حـ ح ر كذلك و ا ر هـ = د ح و بالفرض تكون الزاوية ب ر ح = للزاوية حـ ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين وهو المطلوب

وثانيا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتناظرتان متساويتين

اى اذا كانت الزاويتان المتناظرتان ا ر هـ و حـ ح ر متساويتين يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان الزاويه ا ر هـ = للزاوية ب ر ح بالتقابل والزاوية ا ر هـ = حـ ح ر بالفرض تكون الزاوية ب ر ح = للزاوية حـ ح ر ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين وهو المطلوب

وثالثا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتجانبتان الداخلتان متممتين لبعضهما

أى اذا كانت الزاويتان المتجانبتان الداخلتان ا ر ح و ر ح حـ متممتين لبعضهما يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ر هـ و ا ر ح مساو لقائمتين ومجموع الزاويتين ا ر ح و ر ح حـ مساو لقائمتين يكون ا ر هـ + ا ر ح = ا ر ح + ر ح حـ فاذا طرحت الزاوية المشتركة ا ر ح تبقى الزاوية ا ر هـ = للزاوية ر ح حـ ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين وهو المطلوب

ورابعا أن المستقيمين المقطوعين بقاطع مائل يكونان متوازيين اذا كانت الزاويتان المتجانبتان الخارجتان متممتين لبعضهما

أى اذا كانت الزاويتان المتجانبتان الخارجتان ا ر هـ و حـ ع و متممتين لبعضهما يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين

(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزاويتين المتجاورتين ا ر هـ و هـ ر ب مساو لقائمتين و بالفرض مجموع المتجانبتين ا ر هـ و حـ ع و مساو لقائمتين يكون ا ر هـ + هـ ر ب = ا ر هـ + حـ ع و فاذا طرحت الزاوية المشتركة ا ر هـ تبقى الزاوية هـ ر ب = للزاوية حـ ع و ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ا ب و حـ د متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الثلاثون النظرية شكل ط)

اذا قطع مستقيم مستقيمين وكان مجموع الزاويتين المتجانبتين الداخلتين اكبر أو أصغر من القائمتين فالمستقيمان المذكوران يلتقيان فى الجهة التى يكون فيها مجموع الزاويتين المذكورتين أصغر من القائمتين

أى اذا قطع مستقيم مثل هـ و مستقيمين مثل ا ب و ر س وكان مجموع الزاويتين المتجانبتين الداخلتين ا ع ط و ع ط ر أصغر من قائمتين فالمستقيمان ا ب و ر س يلتقيان جهة ا و ر

(برهانه) أن يقال يلزم من كون مجموع الزاويتين ا ع ط و ع ط ر أصغر من قائمتين أن يكون المستقيمان ا ب و ر س غير متوازيين لانهما لو كانا متوازيين لكان مجموع الزاويتين ا ع ط و ع ط ر مساويا لقائمتين وهذا مخالف للمفروض فتبين بهذا أن المستقيمين المذكورين يكونان غير متوازيين بقى علينا أن نبين الجهة التى يلتقيان فيها فنقول لو مد من النقطة ط مستقيم مثل حـ د يوازى المستقيم ا ب لظهر أن المستقيم ر س يصنع مع المستقيم حـ د زاوية ر ط حـ وانه اذا امتد يصنع مع ا ب زاوية مبادلة ومساوية لها وحيث كانت رأس احداهما فى ط يلزم أن تكون رأس الاخرى جهة ر أى ان المستقيمين ا ب و ر س يلتقيان جهة ر وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ٤٠)

المستقيمان المتوازيان يكونان على أبعاد متساوية أى اذا توازى مستقيمان مثل ا ب و حـ د كان العمودان ح و و ز هـ المحصوران بينهما متساويين (برهانه) أن يقال لو وصل المستقيم و ز لكان المثلثان الحادثان ح و ز و ز و هـ متساويين لان الضلع و ز مشترك والزاوية ح ز و = للزاوية ز و هـ بالتبادل والزاوية ح و ز = للزاوية و ز هـ بالتبادل كذلك (كما فى النظرية السابعة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون العمودان ح و و ز هـ متساويين وهو المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ٤٠)

المستقيمان اللذان على أبعاد متساوية يكونان متوازيين

أى ان المستقيمين اللذين على أبعاد متساوية مثل ا ب و حـ د يكونان متوازيين

(برهانه) أن يقال لو وصل مستقيم مثل و ز لكان المثلثان الحادثان ح و ز و و ز هـ متساويين لان الضلع و ز مشترك والضلع ح و = للضلع ز هـ فرضا والزاوية ح و ز = للزاوية و ز هـ بالتبادل (كما فى النظرية السادسة) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ح ز و = للزاوية ز و هـ ويلزم من كونهما متبادلتين أن يكون المستقيمان حـ د و ا ب متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل اب)

العمود المحصور بين المتوازيين أصغر من كل مائل محصور بينهما

أى أن العمود هـ و المحصور بين المتوازيين ا ب و حـ د أصغر من كل مائل مثل ح ط محصور بينهما

(برهانه) أن يقال لو أنزل من النقطة ح عمود ح ك على حـ د لكان هـ و = ح ك كما فى النظرية الحادية والثلاثين لكن العمود ح ك < المائل ح ط ويلزم من كون العمود ح ك < المائل ح ط أن يكون

العمود

العمود هـ و أصغر من المائل ح ط وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كان العمود هـ و والمائل ح ط متقاطعين فى نقطة بين المتوازيين كالنقطة س يقال فى البرهان من المعلوم أن العمود هـ س < المائل س ح والعمود س و < المائل س ط وان مجموع العمودين أصغر من مجموع المائلين أى هـ س + س و < س ح + س ط لكن هـ س + س و = هـ و, س ح + س ط = ح ط فاذن يكون هـ و < ح ط وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل لـ)

المستقيم الموازى لاحد مستقيمين متلاقيين يتلاقى بالمستقيم الموازى للآخر على زاويتين احداهما تساوى زاوية المستقيمين المتلاقيين والاخرى تتممها

أى اذا تلاقى مستقيمان مثل ا ب و ب ح ومد مستقيم مثل ط ل يوازى المستقيم ا ب ومد أيضا مستقيم مثل و ك يوازى المستقيم ب ح فالمستقيمان ط ل و و ك يلتقيان على زاويتين احداهما د هـ و = ا ب ح والاخرى د هـ ك تتممها

*(برهانه) أن يقال لو لم يتلاق المستقيم و ك بالمستقيم ط ل لكانا متوازيين

ويلزم من هذا انه يمكن أن يمد من نقطة واحدة مثل ب مستقيمان مثل ا ب و ب ح موازيان لمستقيم مثل و ك وقد تقدم انه محال فحينئذ المستقيمان و ك و ط ل لا يتوازيان بل يلتقيان

ويلزم من توازى المستقيمين ا ب و ط ل أن تكون الزاويتان المتبادلتان الداخلتان ا ب ح و ب ح هـ متساويتين ومن توازى المستقيمين ب ح و و ك أن تكون المتبادلتان الداخلتان ب ح هـ و ح هـ و متساويتين فاذن تكون الزاويتان ا ب ح و ح هـ و متساويتين وهو

المطلوب

(تنبيهات)

الاول يحدث من تلاقى ط ل و ك اربع زوايا منها اثنتان كلتاهما تساوى زاوية المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتم الزاوية المذكورة فأما الزاويتان د هـ و و ك هـ ل فكلتاهما تساوى الزاوية ا ب ح وأما الزاويتان د هـ ك و ل هـ و فكلتاهما تتم الزاوية ا ب ح

الثانى تكون الزاويتان متساويتين اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره سواء كان على اتجاهه أو على عكس اتجاهه

الثالث تكون الزاويتان متممتين لبعضهما اذا كان كل ضلع منهما موازيا لنظيره وكان اتجاه أحد ضلعى احداهما بعكس اتجاه نظيره واتجاه الضلع الآخر كاتجاه نظيره

(الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل لد)

العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقيين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر على زاويتين احداهما تساوى زاوية المستقيمين المعلومين والاخرى تتمها

أى ان المستقيم مثل د ط العمود على مستقيم مثل ا ب متلاق بالمستقيم ا ح يتلاقى بالعمود و ح المقام على المستقيم ا ح على زاويتين احداهما د هـ و تساوى الزاوية ب ا ح والاخرى و هـ ط تتمها

(برهانه) أن يقال لو أقيم من رأس الزاوية ا عمود ا ك على ا ح وعمود ا ب على ا ب لكان و ح موازيا ا ك و د ط موازيا ا ب وبمقتضى النظرية السابقة يتلاقى و ح بالمستقيم د ط وحيث ان كلا من المستقيمين ا ب و هـ د عمود على المستقيم ا ب وكلا من المستقيمين ا ك و هـ و عمود على المستقيم ا ح تكون الزاوية ك ا ب مساوية للزاوية د هـ و لانه قد تقدم أن الزاويتين اللتين أضلاعهما المتناظرة متوازية ومتجهة الى جهة واحدة متساويتان وحيث ان المستقيم

ا ب

ا ب عمود على المستقيم ا ب يكون ب ا ك + ك ا ب = قائمة وأيضا حيث ان المستقيم ا ك عمود على المستقيم ا ح يكون ب ا ك + ب ا ح = قائمة ويلزم من هذا أن يكون ب ا ك + ك ا ب = ب ا ك + ب ا ح فاذا طرحت الزاوية المشتركة ب ا ك من الطرفين نتج أن الزاوية ك ا ب = ب ا ح ويلزم من كون الزاوية ك ا ب = للزاوية د هـ و أن تكون الزاويتان ب ا ح , د هـ و متساويتين وهو المطلوب

ومن المعلوم أن الزاوية و هـ ط متممة للزاوية د هـ و فهي متممة للزاوية ب ا ح

(تنبيه)

يحدث من تلاقي المستقيمين و ح , د ط العمودين على المستقيمين المتلاقيين ب ا , ا ح أربع زوايا منها اثنتان كلتاهما تساوي زاوية المستقيمين المعلومين واثنتان كلتاهما تتمم الزاوية المذكورة فأما الزاويتان د هـ و , ح هـ ط فكلتاهما تساوي الزاوية ب ا ح وأما الزاويتان د هـ ح , و هـ ط فكلتاهما تتمم الزاوية ب ا ح

(الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل له)

اذا مد ضلع من مثلث فالزاوية الحادثة بمده تساوي مجموع زوايا الداخلة الا المجاورة لها

أي اذا مد الضلع ب ح على استقامته بجهة ح مثلا فالزاوية الحادثة ا ح د تساوي مجموع زاويتيه الداخلتين ح ا ب , ا ب ح

(برهانه) أن يقال لو مد من النقطة ح مستقيم مثل ح هـ يوازي الضلع ا ب لانقسمت الزاوية ا ح د الى زاويتين احداهما ا ح هـ = ح ا ب بالتبادل والاخرى هـ ح د = ا ب ح بالتناظر لكون المستقيمين ا ب , ح هـ متوازيين مقطوعين بالمستقيم ب د فاذن يكون ا ح هـ + هـ ح د = ح ا ب + ا ب ح لكن ا ح هـ + هـ ح د = ا ح د

فيكون ا ج د = ج ا ب + ا ب ج وهو المطلوب

وينتج من هذه النظرية

أولا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوى قائمتين

أى ان مجموع الزوايا ا و ب و ج يساوى قائمتين

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الزاوية ا ج د = ا + ب أن يكون ا ج د + ا ج ب = ا + ب + ا ج ب ويلزم من كون مجموع المجاورتين ا ج د و ا ج ب مساويا لقائمتين أن يكون ا + ب + ا ج ب = قائمتين فتبين بهذا أن كل مثلث مجموع زواياه يساوى قائمتين

وثانيا انه اذا علم من مثلث زاويتان كل على حدتها أو مجموعهما علمت الثالثة بطرح المعلوم من مقدار القائمتين لانها متممة لمجموعهما

وثالثا انه اذا ساوت زاويتان من مثلث زاويتين من مثلث آخر كل لنظيره كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية لنظيرتها من الثانى وكان المثلثان متساويى الزوايا المتناظرة

أى اذا كانت الزاوية ا = للزاوية اَ والزاوية ب = للزاوية بَ

كانت الزاوية ج مساوية للزاوية جَ

(برهانه) أن يقال يلزم من كون ا + ب + ج = قائمتين

و اَ + بَ + جَ = قائمتين أن يكون ا + ب + ج =

اَ + بَ + جَ فاذا طرح من الطرف الاول ا و ب ومن الثانى

اَ و بَ بقى ج = جَ وهو المطلوب

ورابعا انه اذا ساوى مجموع زاويتين من مثلث مجموع زاويتين من مثلث آخر بدون أن تكون كل واحدة منهما مساوية لنظيرتها كانت الزاوية الثالثة من المثلث الاول مساوية للثالثة من الثانى وفى هذه الحالة لا يكون المثلثان متساويى الزوايا المتناظرة

وخامسا

وخامسا ان أى مثلث قائم الزاوية مجموع الزاويتين المجاورتين لوتر قائمته يساوى قائمة لان مجموعهما يتمم قائمة

وسادسا انه اذا كان المثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين ساوت كل زاوية من المجاورتين لوتر قائمته نصفها

وسابعا انه لا يمكن أن يكون فى المثلث زاويتان قائمتان كل على حدتها اذ لو كان كذلك للزم أن يكون مجموع زواياه الثلاث اكبر من قائمتين وهو محال

وثامنا انه لا يمكن أن يكون فى المثلث زاويتان منفرجتان ولا منفرجة وقائمة

وتاسعا ان اى مثلث منفرج الزاوية مجموع زاويتيه المجاورتين لوتر منفرجته اقل من القائمة

وعاشرا ان أى زاوية من أى مثلث متساوى الاضلاع تساوى ثلث القائمتين اوثلثى القائمة فاذا جعل مقدار القائمة وحدة كان مقدار زاوية المثلث المتساوى الاضلاع $\frac{2}{3}$ وان جعل مقدار القائمة ٩٠ درجة كان مقدار زاويته ٦٠ درجة

* (الدعوى السابعة والثلاثون النظرية) *

اذا وازت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة

(برهانه) أن يقال لو رمز لزوايا المثلث الاول بالحروف ا و ب و ح ولزوايا المثلث الثانى بالرموز اَ و بَ و حَ وفرض أن ضلعى الزاوية ا موازيان لضلعى الزاوية اَ كل لنظيره وضلعى الزاوية ب لضلعى الزاوية بَ وضلعى الزاوية ح لضلعى الزاوية حَ ولوحظ ما تقدم فى النظرية الرابعة والثلاثين لتحصل

ا = اَ أو ا + اَ = قائمتين

ب = بَ أو ب + بَ = قائمتين

ح = حَ أو ح + حَ = قائمتين

و يلزم من كون مجموع زوايا المثلث مساويا لقائمتين أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لاربع قوائم و يلزم من هذا أن لا تكون الزاوية ا متممة للزاوية أ والزاوية ب متممة للزاوية بَ والزاوية ح متممة للزاوية حَ فى ان واحد اذ لو كانت كذلك للزم أن يكون مجموع زوايا المثلثين مساويا لست قوائم وهو محال بل لا يمكن أن تكون زاويتان من زوايا احد المثلثين متممتين لنظيرتيهما من المثلث الآخر فى آن واحد لانهما لو كانتا كذلك للزم أن يكون مجموع الزوايا الاربع المذكورة مساويا لاربع قوائم و يلزم من هذا انعدام الزاوية الثالثة من احد المثلثين وانعدام نظيرتها من المثلث الآخر وهو محال فتبين بهذا انه لا بد من أن يكون فى احد المثلثين زاويتان كل منهما مساوية لنظيرتها من الآخر و يلزم من هذا أن تكون الثالثة من احدهما مساوية لنظيرتها كذلك وهو المطلوب

* (الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية) *

اذا تعامدت الاضلاع المتناظرة من مثلثين تساوت زواياهما المتناظرة

(برهانه) أن يقال لو رمز لزوايا احد المثلثين بالحروف ا و ب و ح ولزوايا المثلث الآخر بالرموز اَ و بَ و حَ وفرض أن ضلعى الزاوية ا عمودان على ضلعى الزاوية اَ كل على نظيره وأن ضلعى الزاوية ب على ضلعى الزاوية بَ وضلعى الزاوية ح على ضلعى الزاوية حَ ولوحظ ما تقدم فى النظرية الرابعة والثلاثين لتحصل

ا = اَ أو ا + اَ = قائمتين

ب = بَ أو ب + بَ = قائمتين

ح = حَ أو ح + حَ = قائمتين

لكن

لكن قد سبقت استحالة وجود المتساويات الثلاث الاخر فلم يبق الا أن ا = اَ
و ب = بَ و ح = حَ وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٤٢)

كل شكل كثير الاضلاع محدب مجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقى طرحه فى اثنين أى أن أى شكل كثير الاضلاع محدب مثل المسبع ا ب ح ى ه و ر مجموع زواياه الداخلة يساوى من القوائم عدد اضلاعه الا اثنين مضروبا باقى طرحه في اثنين أى
(٧ — ٢) × ٢ = ٥ × ٢ = ١٠ قوائم

(برهانه) أن يقال ان أقطار هذا الشكل المارة من رأس زاوية واحدة تقسمه الى مثلثات مجموع زواياها يساوى مجموع زواياه ولا يخفى أن عدد اضلاعه يزيد على عدد تلك المثلثات بضلعين لان كل مثلث يشتمل على ضلع من اضلاع الشكل ماعدا المثلثين المتطرفين فان كلا منهما يشتمل على ضلعين

وينتج من هذه النظرية

أولا أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل رباعى محدب يساوى (٤ — ٢) × ٢ = ٢ × ٢ = ٤ قوائم فان كانت تلك الزوايا متساوية كانت كل واحدة منهن قائمة وهذه الخاصية فى المربع والمستطيل

وثانيا أن مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل خماسى محدب يساوى (٥ — ٢) × ٢ = ٣ × ٢ = ٦ قوائم فان كان متساوى الزوايا كان مقدار أى زاوية من زواياه خمس الست قوائم أو ستة اخماس القائمة وبهذه الكيفية يتعين مقدار زاوية أى شكل متساوى الزوايا عدد اضلاعه معين

(تنبيهان)

الاول اذا رمز بالحرف م لعدد اضلاع شكل محدب كان مجموع زواياه

الداخلة مبينا بهذا القانون (م — ٢) × ٢ = ٢ م — ٤
اعنى أن أى شكل مستقيم الاضلاع محدب مجموع زواياه يساوى قوائم عددها بقدر ضعف عدد اضلاعه الا اربعة

الثانى أن هذه الدعوى لا تنطبق على أى شكل غير محدب

* (الدعوى الاربعون النظرية شكل لط) *

اذا مدت اضلاع مثلث الى اتجاه واحد بحيث لا تكون خارجة تقابل داخلة كان مجموع الزوايا الحادثة مساويا لاربع قوائم

أى اذا امتد الضلع ب ح على استقامته جهة ح والضلع ح ء جهة ء والضلع ء ب جهة ب ورمز للزوايا الحادثة بالرموز بَ و حَ و ءَ يكون بَ + حَ + ءَ = ٤ قوائم

(برهانه) أن يقال يلزم من كون ب + بَ = قائمتين و ح + حَ = قائمتين و ء + ءَ = قائمتين أن يكون

ب + ح + ء + بَ + حَ + ءَ = ٦ قوائم ويلزم من هذا أن يكون

بَ + حَ + ءَ = ٦ قوائم — (ب + ح + ء) لكن ب + ح + ء = قائمتين فيكون بَ + حَ + ءَ = ٦ قوائم — قائمتين = اربع قوائم وهو المطلوب

* (الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل م) *

اذا مدت أضلاع شكل مستقيم الاضلاع محدب الى اتجاه واحد بحيث لا تكون خارجة تقابل داخلة كان مجموع الزوايا الخارجة الحادثة مساويا لاربع قوائم

أى اذا امتد الضلع ب ح على استقامته جهة ب والضلع ب و جهة و والضلع و هـ جهة هـ والضلع هـ ء جهة ء والضلع ء ح جهة ح

ج ورمز للزوايا الحادثة بالرموز بَ و جَ و دَ و هَ و وَ يكون

بَ + جَ + دَ + هَ + وَ = ٤ قوائم

(برهانه) أن يقال يلزم من كون ب + بَ = قائمتين و ج + جَ = قائمتين و د + دَ = قائمتين و هـ + هَ = قائمتين و و + وَ = قائمتين أن يكون مجموع الزوايا الداخلة والخارجة مساويا القوائم بقدر ضعف عدد اضلاع الشكل وقد تقدم في النظرية التاسعة والثلاثين أن مجموع الزوايا الداخلة من أي شكل مستقيم الاضلاع محدب يساوي قوائم بقدر ضعف عدد أضلاعه الا اربعة فاذن يكون مجموع الزوايا الخارجة مساويا الاربع قوائم وهو المطلوب

وهاك جدولا يبين فيه عدد اضلاع الاشكال من المثلث الى ذي العشرين وما يساويه مجموع زواياها الداخلة ومجموع زواياها الخارجة ومجموع زواياها الداخلة والخارجة معا

عدد اضلاع [redacted]	مجموع زواياها [redacted]	مجموع زواياها الخارجة	مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا
[redacted]	[redacted]	٤	٦
٤	٤	٤	٨
٥	٦	٤	١٠
٦	٨	٤	١٢
٧	١٠	٤	١٤
٨	١٢	٤	١٦
٩	١٤	٤	١٨
١٠	١٦	٤	٢٠
١١	١٨	٤	٢٢
١٢	٢٠	٤	٢٤
١٣	٢٢	٤	٢٦
١٤	٢٤	٤	٢٨
١٥	٢٦	٤	٣٠
١٦	٢٨	٤	٣٢
١٧	٣٠	٤	٣٤
١٨	٣٢	٤	٣٦
١٩	٣٤	٤	٣٨
٢٠	٣٦	٤	٤٠

وبالتأمل فى هذا الجدول يشاهد أنه يتركب من عدد أضلاع الاشكال متوالية عددية تصاعدية حدّها الاول ٣ وأساسها واحد

وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلة متوالية عددية تصاعدية حدّها الاوّل ٢ وأساسها ٢.

وأنه يتركب من مجموع زواياها الداخلة والخارجة معا متوالية عددية

تصاعدية

تصاعدية حدها الاول ٦ واساسها ٢
وان مجموع زواياها الخارجة ثابت لا يتغير عن الاربع قوائم

(الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ٤٤)

قطر المتوازى الاضلاع يقسمه الى مثلثين متساويين
أى أن متوازى الاضلاع مثل ا ب ح ء ينقسم بالقطر ء ب مثلا الى مثلثين ا ب ء و ء ب ح متساويين

(برهانه) أن يقال يلزم من كون المستقيمين ا ب و ح ء متوازيين ومقطوعين بالقاطع ء ب أن تكون الزاويتان المتبادلتان ا ب ء و ب ء ح متساويتين وكذا يلزم من كون المستقيمين ا ء و ب ح متوازيين ومقطوعين بالقاطع ء ب أن تكون الزاويتان المتبادلتان ا ء ب و ء ب ح متساويتين وحيث ان الضلع ء ب مشترك بين المثلثين ا ب ء و ء ب ح يكونان متساويين (كما تقدم اثباته فى النظرية السابعة)

وينتج من هذه النظرية

أولا أن الاضلاع المتقابلة فى أى شكل متوازى الاضلاع متساوية

وثانيا أن الزوايا المتقابلة فى أى شكل متوازى الاضلاع متساوية

وثالثا أنه اذا ساوى ضلعان وزاوية بينهما من شكل متوازى الاضلاع ضلعين آخرين وزاوية بينهما من شكل آخر متوازى الاضلاع تساوت بقية أجزاء أحدهما بقية أجزاء الآخر كل بنظيره

ورابعا أنه اذا تساوى ضلعان متجاوران من شكل متوازى الاضلاع كانت اضلاعه كلها متساوية

وخامسا أنه اذا كانت احدى زوايا متوازى الاضلاع قائمة كانت زواياه كلها كذلك

(الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ٤٤)

كل شكل رباعى تساوت اضلاعه المتقابلة فهو متوازى الاضلاع
أى أى شكل رباعى مثل ا ب ح ء اذا كان فيه الضلع ا ب مساويا لمقابله

ءحو والضلع ا ء مساو بالمقابلة ب حو يكون متوازى الاضلاع اعنى يكون الضلع اب موازيا للضلع ء حو والضلع ا ء موازيا للضلع ب حو

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر ء ب لكان المثلثان الحادثان ا ب ء و ء ب حو متساويين لان الضلع ء ب مشترك بينهما والضلع ا ب = الضلع ء حو بالفرض والضلع ا ء = للضلع ب حو كذلك كما فى (النظرية الحادية عشر) ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية ا ب ء = ب ء حو والزاوية ا ء ب = ء ب حو ويلزم من كون المتبادلتين ا ب ء و ب ء حو متساويتين أن يكون المستقيمان ا ب و ء حو متوازيين ومن تساوى المتبادلتين ا ء ب و ء ب حو أن يكون المستقيمان ا ء و ب حو متوازيين فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متوازية كما هى متساوية فاذن يكون الشكل المذكور متوازى الاضلاع وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة والاربعون النظرية شكل ٤٤)

اذا كان الضلعان المتقابلان فى الشكل الرباعى متساويين ومتوازيين كان الضلعان الآخران كذلك ويكون الشكل المذكور متوازى الاضلاع أى اذا كان الضلعان المتقابلان مثل ا ب و حو ء من الرباعى ا ب حو ء متساويين ومتوازيين كان الضلعان الآخران ا ء و ب حو متساويين ومتوازيين وكان الشكل ا ب حو ء متوازى الاضلاع

(برهانه) أن يقال لو وصل القطر ء ب لكان المثلثان الحادثان ا ب ء و ء ب حو متساويين لان الضلع ء ب مشترك والضلع ا ب = للضلع ء حو بالفرض والزاوية ا ب ء = ب ء حو بالتبادل لكون ا ب و ء حو متوازيين وقد ثبت فى النظرية السادسة أن المثلثين اللذين بهذه الشابهة متساويان ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون الضلع ا ء = للضلع ب حو وأن تكون الزاوية ا ء ب = للزاوية ء ب حو وحيث ان الزاويتين ا ء ب و ء ب حو متبادلتان يكون الضلعان ا ء و ب ء متوازيين

فقد ثبت بهذا أن الاضلاع المتقابلة متساوية ومتوازية فاذن يكون الشكل المذكور متوازى الاضلاع وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ٤٥)

قطرا المتوازى الاضلاع ينصفان بعضهما

أى ان متوازى الاضلاع مثل ا ب ح ء اذا وصل قطراه ا ح و ب ء كانت نقطة تقاطعهما في منتصف كل منهما أعنى يكون ا هـ = هـ ح و ب هـ = هـ ء

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الشكل متوازى الاضلاع ان يكون الضلعان المتقابلان ا ب و ء ح متساويين ومتوازيين ويلزم من كونهما متوازيين أن تكون الزاويتان المتبادلتان ا ب ء و ب ء ح متساويتين وأن تكون الزاويتان المتبادلتان ب ا ح و ا ح ء متساويتين وقد ثبت في النظرية السابعة أن المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون ا هـ = هـ ح و ب هـ = هـ ء وهو المطلوب

(تنبيهان)

الاول قطرا المعين ينصفان بعضهما عمادا لانه يلزم من كون الضلع ا ب = ا ء والضلع ب هـ = هـ ء والضلع ا هـ مشتركا أن يكون المثلث ا ب هـ = للمثلث ا هـ ء ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاويتان ب هـ ا و ا هـ ء متساويتين ويلزم من كونهما متجاورتين ومتساويتين أن يكون المستقيم ا ح عمودا على المستقيم ب ء وهو المطلوب

الثانى كل شكل رباعى تساوت أضلاعه فأقطاره تنصف زواياه وتنصف بعضها عمادا

(الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ٤٦)

قطرا المستطيل متساويان

أى ان المستطيل مثل ا ب جـ د قطراه مثل ا جـ و ب د متساويان

(برهانه) أن يقال يلزم من كون الضلع ا ب مشتركا فى المثلثين ا ب د و ا ب جـ والضلع ا د = للضلع ب جـ والقائمة د ا ب = ا ب جـ أن يكون المثلثان المذكوران متساويين ويلزم من تساويهما أن يكون القطران ا جـ و ب د متساويين وهو المطلوب

(تنبيهات)

الاول قطرا المربع متساويان كما أن قطرى المستطيل كذلك

الثانى قطرا المربع ينصفان زواياه وينصفان بعضهما عمادا كما أن قطرى المعين كذلك

الثالث الشكل الرباعى يكون متوازى الاضلاع اذا كان كل من قطريه منصفا للآخر

(الدعوى السابعة والاربعون النظرية شكل مو)

اذا نصف أحد أضلاع مثلث بنقطة ومد منها مستقيم يوازى أحد الضلعين الباقيين فاعلم أولا أنه يمر بوسط الضلع الثالث وثانيا أنه يكون مساويا لنصف الضلع الموازى له

أى اذا نصف ضلع مثل ا جـ من المثلث ا جـ ب بنقطة مثل هـ ومد منها مستقيم مثل هـ د يوازى الضلع جـ ب فاعلم أولا انه يمر بوسط الضلع الثالث ا ب أعنى يكون ا د = د ب وثانيا أنه يكون مساويا لنصف جـ ب أعنى يكون هـ د = $\frac{\text{جـ ب}}{٢}$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو مد من النقطة هـ مستقيم مثل هـ و يوازى الضلع ا ب لحدث مثلث هـ جـ و يساوى المثلث ا هـ د لانه يلزم من توازى المستقيمين جـ ب و هـ د أن تكون الزاويتان المتناظرتان جـ و ا هـ د متساويتين ومن توازى المستقيمين ا ب و هـ و أن تكون الزاويتان المتناظرتان جـ هـ و و ا متساويتين ومن المعلوم أن الضلع جـ هـ = للضلع هـ ا بالفرض فيكون المثلث هـ جـ و =

المثلث

المثلث ا هـ ء كما ثبت ذلك (في النظرية السابعة)
ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون هـ و = ا ء وحيث ان الشكل الرباعى هـ و ب ء متوازى الاضلاع يكون هـ و = ء ب ويلزم من هذا أن يكون ا ء = ء ب وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تساوى المثلثين اهء و هـ حو أن يكون هـ ء = حو ومن توازى اضلاع الرباعى هـ و ب ء أن يكون هـ ء = و ب ويلزم من هذا أن يكون حو = و ب وأن يكون هـ ء = $\frac{حب}{٢}$ وهو المطلوب •

(الدعوى الثامنة والاربعون النظرية شكل مز)

أى شكل شبيه المنحرف اذا مد من وسط أحد ضلعيه المنحرفين مستقيم يوازى احدى القاعدتين المتوازيتين أى الضلعين المتوازيين فاعلم
أولا أن هذا المستقيم يمر بوسط الضلع الآخر
وثانيا أن المستقيم المذكور يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين
أى ان أى شكل شبيه المنحرف مثل ا ب ح ء اذا مد من النقطة و التى هى وسط ضلعه ء ح غير الموازى للضلع ا ب مستقيم مثل و هـ يوازى احدى القاعدتين المتوازيتين ا ء و ب ح فاعلم
أولا أن المستقيم و هـ يمر بوسط الضلع الآخر ا ب أعنى يكون ا هـ = هـ ب
وثانيا أن المستقيم و هـ يساوى نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين ا ء و ب ح أعنى يكون و هـ = $\frac{اء + بح}{٢}$

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل قطر الشكل مثل ا ح لحدث مثلثان ا ء ح و ا ح ب أما الاول وهو ا ء ح ففيه ء و = و ح بالفرض و و ع يوازى ا ء كذلك فيلزم أن يكون ا ع = ع ح وأن يكون و ع = $\frac{اء}{٢}$ وأما الثانى وهو ا ح ب ففيه ا ع = ع ح و ع هـ يوازى ح ب فيلزم أن يكون ا هـ = هـ ب وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون و ع = $\frac{اك}{٢}$ و ع هـ = $\frac{حـ}{٢}$ أن يكون د ح + ح هـ = $\frac{اك}{٢}$ + $\frac{حـ}{٢}$ أى و هـ = $\frac{ا ب + حـ}{٢}$ وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والاربعون النظرية شكل مو)

المستقيم المار بوسطى ضلعى مثلث يوازى ضلعه الثالث أى ان المستقيم هـ ى المار بوسطى الضلعين ا حـ و ا ب من المثلث ا حـ ب يوازى ضلعه الثالث حـ ب

(برهانه) أن يقال لومد من النقطة هـ مستقيم هـ و يوازى ا ب حدث مثلث هـ حـ و = المثلث اهـ ى لان حـ هـ = هـ ا بالفرض والزاوية حـ هـ و = للزاوية ا بالتناظر و هـ و = ا ى كما تقدم وقد ثبت فى النظرية السادسة أن المثلثين اللذين بهذه المثابة متساويان ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية حـ = للزاوية اهـ ى ويلزم من كونهما متناظرتين ومتساويتين أن يكون المستقيمان هـ ى و حـ ب متوازيين وهو المطلوب

(الدعوى الخمسون النظرية شكل مز)

أى شكل شبيه المنحرف المستقيم المار بوسطى ضلعيه المنحرفين يوازى كلا من قاعدتيه المتوازيتين

أى ان أى شكل شبيه المنحرف مثل ا ب حـ ى المستقيم هـ و المار بوسطى ضلعيه غير المتوازيين ا ب و ى حـ يوازى كلا من قاعدتيه المتوازيتين ا ى و ب حـ

(برهانه) أن يقال لووصل احد قطرى الشكل مثل ى ب ونصف بنقطة مثل ع ومد منها مستقيم يوازى كلا من القاعدتين المتوازيتين ا ى و ب حـ لمر بوسطى الضلعين ا ب و ى حـ

وينتج من هذه النظرية

أولا أن المستقيم المار بوسطى ضلعى شبيه المنحرف غير المتوازيين يمر أيضا

وسطى قطريه ويكون مساويا لنصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين
وثانيا أن المستقيم المحصور بين وسطى قطريه يكون مساويا لنصف فاضل قاعدتيه المتوازيتين انظر (شكل مح)

لانه لووصل المستقيم د ط ومد على استقامته جهة ط حتى لاقى جب في ه لحدث مثلث د ج ه فيه و ط يوازى ج ه و د و = و ج فيكون و ط = جه/٢ وحيث ان و ط = اد/٢ فيكون جه/٢ = اد/٢ أو جه = اد وحيث ان ب ه = ب ج − ج ه يكون ب ه = ب ج − اد

ويلزم من كون ح ط موازيا للضلع ب ج و د ح = ح ب أن يكون ح ط = به/٢ فاذن يكون
ح ط = (ب ج − اد)/٢ وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والخمسون النظرية شكل ۞)

الشكل الرباعى يكون متوازى الاضلاع اذا كانت زواياه المتقابلة متساوية

أى ان الشكل الرباعى مثل ا ب ج د يكون متوازى الاضلاع اذا كانت زواياه المتقابلة ا و ج و ب و د متساوية

(برهانه) أن يقال حيث ان مجموع الزوايا الداخلة من أى شكل رباعي محدب يساوى أربع قوائم يكون
ا + ج + ب + د = ٤ قوائم وحيث ان
ا = ج بالفرض و ب = د كذلك يكون
٢ ج + ٢ ب = ٤ قوائم ويلزم من هذا أن يكون
ج + ب = لقائمتين وحيث كان مجموع الجانبتين الداخلتين ج و ب مساويا لقائمتين يكون المستقيمان اب و ج د متوازيين وبمثل هذا يبرهن على أن اد و ب ج متوازيان وهو المطلوب

تمت المقالة الاولى بحمد الله وعونه

(المقالة الثانية)

(في بيان الدائرة ومقادير الزوايا)

(حدود)

(حد ١) (شكل ٤٦) محيط الدائرة خط منحن جميع نقطه على أبعاد متساوية من نقطة داخله تسمى مركزا

والدائرة سطح مستو محاط بهذا الخط المنحنى

(حد ٢) نصف القطر مستقيم ممتد من المركز الى المحيط مثاله ح ا من (الشكل ٤٦)

والقطر مستقيم يمر بالمركز وينتهى بنقطتين من المحيط مثاله ا ب من (الشكل ٤٦) وبمقتضى تعريف محيط الدائرة تكون أنصاف الاقطار كلها متساوية وكذلك الاقطار وينتج من تعريف محيط الدائرة أن النقطة التى يكون بعدها عن المركز أكبر من نصف القطر تكون خارجة عن المحيط والتى بعدها عن المركز أصغر من نصف القطر تكون داخل الدائرة .

(حد ٣) القوس جزء من المحيط مثاله و ح ر من (الشكل ٤٦)

والوتر مستقيم ينتهى بطرفى القوس مثاله و ر من الشكل ٤٦)

(حد ٤) قطعة الدائرة جزء منها محاط بقوس ووتر مثالها القطعة و ح ر أو القطعة و ا هـ د ب ر من (الشكل ٤٦)

(تنبيه)

اعلم أن الوتر مثل و ر انما ينسب عند الاطلاق للقوس الاصغر وان كان موافقا للقوسين والقطعتين الكبرى والصغرى

(حد ٥) قطع الدائرة جزء من الدائرة محاط بقوس وبنصفى قطرين واصلين الى نهايتى ذلك القوس مثاله ا ح هـ أو هـ ح د أو د ح ب من الشكل ٤٦)

(حد ٦) (شكل ٤٧) المستقيم الداخلى ما كان مرسوما داخل الدائرة ومنتهيا بنقطتين من محيطها مثاله المستقيم ا ب من (الشكل ٤٧)

الزاوية الداخلية زاوية رأسها بالمحيط وضلعاها وتران مثالها الزاوية ب ا ح من (الشكل ٤٧)

المثلث الداخلي مثلث رؤسه بالمحيط مثاله المثلث ب ا ح من (الشكل ٤٧) ويقال للدائرة حينئذ خارجية بمعنى انها مرسومة عليه

كثير الاضلاع الداخلي شكل رؤسه بالمحيط ويقال للدائرة حينئذ خارجية بالمعنى المتقدم

(حد ٧) القاطع مستقيم يقطع محيط الدائرة في نقطتين مثاله المستقيم ا ب من (الشكل ٤٨)

(حد ٨) المستقيم المماس لمحيط الدائرة هو مستقيم لا يشترك مع المحيط الا في نقطة واحدة مثاله المستقيم ح ى من (الشكل ٤٨) ونقطة التماس هي نقطة الاشتراك مثالها م

(حد ٩) الدائرتان المتماستان دائرتان لا يتشارك محيطاهما الا في نقطة واحدة

(حد ١٠) كثير الاضلاع الخارجي ما كانت جميع اضلاعه مماسة للمحيط مثاله ك ل م الخ من (الشكل ١٦٠) وحينئذ يقال للدائرة داخلية بمعنى انها مرسومة داخله

(دعاوى)

(الدعوى الاولى النظرية شكل ٤٩)

كل قطر ينصف الدائرة والمحيط

أى ان كل قطر مثل ا ب يقسم الدائرة والمحيط الى جزئين متساويين

(برهانها) أن يقال لو جعل القطر ا ب فصلا مشتركا وطبق الشكل ا هـ ب على الشكل ا و ب لانطبق الخط المنحنى ا هـ ب على الخط المنحنى ا و ب انطباقا كليا والا لكان في أحدهما نقط ابعادها عن المركز غير متساوية وهذا مخالف لتعريف محيط الدائرة

(تنبيه)

شكل

كل مستقيم قسم المحيط الى جزءين متساويين يكون قطرا أى ان كل مستقيم مثل ا ب يقسم المحيط ا م ب ن فى النقطتين ا و ب الى جزءين متساويين يكون قطرا

(برهانها) أن يقال لو لم يكن ا ب قطرا لكان مركز المحيط كالنقطة و مثلا خارجا عنه ويلزم منه أن يكون المستقيم ا و ك مثلا هو القطر ويلزم من كونه قطرا أن يكون ا م ك نصف المحيط ويلزم منه أن يكون الجزء ا م ك مساويا للكل ا م ك ب وهو محال فيلزم أن يكون المركز على المستقيم ا ب أى ان ا ب هو القطر وهو المطلوب انظر (شكل ٤٩ الثانى)

(الدعوى الثانية النظرية شكل ٤٩)

كل وتر أصغر من القطر

أى ان كل وتر مثل ا ى فهو أصغر من القطر

(برهانها) أن يقال لو وصل من نهايتى الوتر ا ى نصفا قطرين اح و حى لحدث مثلث ا ح ى أى ضلع من اضلاعه أصغر من مجموع الضلعين الآخرين

ومن المعلوم أن أحد اضلاعه هو الوتر وهو أصغر من مجموع نصفى القطرين وهذا المجموع يساوى قطرا كاملا فحينئذ يكون الوتر أصغر من القطر

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية أن أكبر خط مستقيم يمكن رسمه فى الدائرة يساوى قطرها

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ٣ من ٢)

أى مستقيم قاطع لا يمكن أن يقطع محيط الدائرة فى اكثر من نقطتين

(برهانها) أن يقال لو فرض أن مستقيما مثل س ص يقطع محيطا كان مركزه و فى ثلاث نقط مثل ا و ب و ح لامكن توصيل أنصاف اقطار مثل او و وب و وح ولو فرض أن النقطة م هى وسط الوتر ا ب والنقطة مَ وسط الوتر ب ح ثم وصل وم و ومَ للزم أن يكون

وم عموداعلى ا ب و وَم عموداعلىَ ب ح لان كلامن المثلثين الحادثين او ب و ب و ح متساوى الساقين ويلزم من هذا امكان تنزيل عمودين وم و ومَ على المستقيم س ص وهومحال

(الدعوى الرابعة النظرية شكل ٥٠)

الاقواس المتساوية أوتارها متساوية والاوتار المتساوية أقواسها متساوية سواء كان ذلك فى دائرة واحدة أودوائر متساوية والدوائر المتساوية ما كانت أنصاف أقطارها متساوية

أى اذا كان القوس ا ط ى مساويا للقوس هـ ب ح يكون الوتر ا ى مساويا للوتر هـ ح وبالعكس أى اذا كان الوتر ا ى مساويا للوتر هـ ح يكون القوس ا ط ى مساويا للقوس هـ ب ح

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من كون القطر ا ب مساويا للقطر هـ و أن يمكن تطبيق نصف الدائرة ا ط ى ب على نصف الدائرة هـ ب ح و . ويلزم من هذا أن يتحد الخط المنحنى ا ط ى ب بالخط المنحنى هـ ب ح و اتحادا كليا وحيث ان الجزء ا ط ى مساو للجزء هـ ب ح بالفرض تقع النقطة ى على النقطة ح فاذن يكون الوتر ا ى مساويا للوتر هـ ح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل نصفا القطرين حى و ر ح حدث مثلثان اح ى و هـ ر ح اضلاعهما المتناظرة متساوية أعنى ا ح = هـ ر و ح ى = ر ح و ا ى = هـ ح ويلزم من هذا أن يكونا متساويين ويلزم من تساويهما أن تكون الزاوية ا ح ى مساوية للزاوية هـ ر ح فلو طبق نصف الدائرة ا ى ب على مساويه هـ ح و لوقع نصف القطر ح ى على نصف القطر ر ح لان الزاوية ا ح ى = هـ ر ح ووقعت النقطة ى على النقطة ح فاذن يكون القوس ا ط ى مساويا للقوس هـ ب ح وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة النظرية شكل ٥٠)

القوس

القوس الاكبر من آخر في دائرة واحدة أو في دوائر متساوية وتره أكبر من وتر الآخر

والوتر الاكبر كذلك قوسه اكبر بشرط أن لا يزيد اكبر القوسين عن نصف المحيط

أي اذا كان القوس مثل ا ط ك أكبر من آخر مثل هـ ب ح يكون الوتر ا ك أكبر من الوتر هـ ح

واذا كان الوتر ا ك أكبر من الوتر هـ ح يكون القوس اطك أكبر من القوس هـ ب ح

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو أخذ مثل قوس ا ط د مساو للقوس هـ ب ح لكان الوتر ا د مساويا للوتر هـ ح فاذا وصل نصفا القطر بن د و ك و لحدث مثلثان ا و د و ا و ك فيهما ا و مشترك و و د = و ك والزاوية ا و ك أكبر من الزاوية ا و د فاذن يكون الضلع ا ك أكبر من الضلع ا د

وحيث ان ا د = هـ ح يكون ا ك أكبر من هـ ح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم يكن القوس اطك أكبر من القوس هـ ب ح لكان اما مساويا له أو أصغر منه فان كان مساويا له كان الوتر ا ك مساويا للوتر هـ ح وان كان أصغر منه كان الوتر ا ك أصغر من الوتر هـ ح وكلاهما مخالف للمفروض فاذن يكون القوس اطك أكبر من القوس هـ ب ح وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم انه اذا كان كل من القوسين أكبر من نصف المحيط كان وتر القوس الاكبر أصغر وما هو مرسوم في (الشكل ٥٠) يوضح ذلك فان فيه القوس ا ب ك د أكبر من القوس ا ب ك والوتر ا د أصغر من الوتر ا ك

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٥١)

القطر العمود على وتر ينصفه وقوسه معا

أى ان القطر مثل ع د العمود على الوتر مثل ا ب ينصفه بالوسيه ا د ب
أعنى يكون ا ء = ء ب والقوس ا د = للقوس د ب
(برهان القضية الاولى) أن يقال لو وصل نصفا القطرين ا ح و ح ب
لكان المثلث ا ح ب متساوى الساقين لان نصف القطر ا ح = ح ب
وقد تقرر فى النظرية الثانية عشر من المقالة الاولى أن العمود النازل من
رأس المثلث المتساوى الساقين على قاعدته ينصفها فقد ثبت بهذا أن البعد
ا ء = ء ب وهو المطلوب
(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل الوتران ا د و د ب لكانا
متساويين لانه يلزم من كون د ء عمودا على ا ب والبعد ا ء = ء ب
أن يكون المائل ا د = د ب ويلزم من كون الوتر ا د = د ب أنه
يكون القوس ا د = للقوس د ب وهو المطلوب

•(تنبيه)•

اعلم أن المستقيم ح د المار بالمركز ح وبوسط الوتر ا ب وبوسط القوس
ا د ب يكون عمودا على الوتر المذكور وحيث ان شرطين من هذه الشروط
يكفيان لتعيين وضع مستقيم يعلم من ذلك أن كل مستقيم وجد فيه شرطان
من هذه الشروط لا بد وأن يوجد فيه الشرطان الآخران فحينئذ العمود
المقام على وسط الوتر يمر بالمركز وبوسط القوس الموتر به والمستقيم المار بالمركز
وبوسط القوس يكون عمودا على وسط وتر ذلك القوس وهكذا

•(الدعوى السابعة النظرية شكل ٥٢ الثانى)•

كل ثلاث نقط ليست على مستقيم يمكن أن يمر بها محيط دائرة لا اثنان
أى أن كل ثلاث نقط مثل ا و ب و ح ليست على مستقيم يمكن أن يمر
بها محيط دائرة لا محيطان
(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان ب ا و ا ح ونصف المستقيم ب ا
بنقطة مثل ء ونصف المستقيم ا ح بنقطة مثل ع وأقيم ء ه عمودا
على ا ب واقيم ع ط عمودا على ا ح لالتقى العمودان ء ه و ع ط

لانه

لانه قد تقرر في النظرية الخامسة والثلاثين من المقالة الاولى أن العمود المقام على أحد مستقيمين متلاقيين يتلاقى بالعمود المقام على المستقيم الآخر ولنبرهن على أن نقطة تقاطع العمودين هي المركز فنقول حيث كانت نقطة التقاطع نقطة من نقط العمود د هـ يكون بعدها عن النقطة ب كبعدها عن النقطة ا ولكونها أيضا من نقط العمود ع ط يكون بعدها عن النقطة ا كبعدها عن النقطة ح فحينئذ المحيط الذى مركزه نقطة التقاطع ط ونصف قطره ط ب يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن كل ثلاث نقط ليست على مستقيم يمكن أن يمر بها محيط دائرة

ولبيان عدم امكان مرور محيط آخر بالنقط المذكورة يقال لو أمكن أن يمر محيط آخر بالنقط المذكورة للزم أن يكون مركزه على العمود د هـ لانه لو كان خارجا عن العمود د هـ لكان البعدان الواصلان منه الى النقطتين ب و ا غير متساويين وكذا يلزم أن يكون المركز على العمود ع ط فحينئذ يكون المركز على كلا العمودين د هـ و ع ط وحيث انه لا يمكن أن يتقاطع الخطان المستقيمان الا في نقطة واحدة يلزم أن يكون المركز واحدا وأن يتحد المحيطان وهو المطلوب

* (نتيجة) *

ينتج من هذه النظرية أن المحيطين لا يمكن أن يتقاطعا في أكثر من نقطتين لانه لو وجد لهما ثلاث نقط مشتركة لاتحد المركز فيهما وحينئذ لا يكونان الا محيطا واحدا فقط

* (الدعوى الثامنة النظرية شكل ٣٢) *

الوتران المتساويان بعداهما عن المركز متساويان والوتران غير المتساويين أصغرهما أبعدهما عن المركز

أى ان الوترين المتساويين مثل ا ب و د هـ بعداهما عن المركز ح و و ح ر متساويان وان الوترين غير المتساويين مثل ا ب و ا ع أصغرهما

أبعدهما عن المركز

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو نصف الوتر ا ب بالعمود ح و والوتر د هـ بالعمود ح ر ووصل نصفا القطرين ا ح , ح د لحدث مثلثان قائما الزاوية ح ا و , ح د ر متساويان لان الوتر ح ا = ح د والضلع ا و الذى هو نصف الوتر ا ب يساوى الضلع د ر الذى هو نصف الوتر د هـ ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون الضلع ح و مساويا للضلع ح ر وهو المطلوب فقد ثبت بهذا أن الوترين المتساويين بعداهما عن المركز متساويان

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن الوتر ا ح أكبر من الوتر د هـ فيكون القوس ا ب ح أكبر من القوس د ك هـ

فلو أخذ من القوس ا ب ح الجزء ا ب = د ك هـ ووصل الوتر ا ب وأنزل العمود ح و على الوتر ا ب والعمود ح ط على الوتر ا ح لظهر أن ح و أكبر من ح م وحيث ان المائل ح م أكبر من العمود ح ط يكون ح و أكبر من ح ط

وحيث ان ح و = ح ر لان الوتر ا ب = د هـ يكون ح ر أكبر من ح ط فقد ثبت بهذا ان الوترين غير المتساويين أصغرهما ابعدهما عن المركز وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ٥٤)

العمود المقام على نهاية نصف قطر يكون مماسا لمحيط الدائرة فى النهاية المذكورة ونصف القطر المار بنقطة تماس مستقيم مماس يكون عمودا على الخط المماس

أى ان العمود د ب المقام على نهاية نصف قطر مثل ح ا يكون مماسا لمحيط الدائرة فى النقطة ا وان نصف القطر ح ا المار بنقطة التماس ا يكون عمودا على الخط المماس د ب

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو أخذ على المستقيم ب د نقطة مثل هـ

غير

غير النقطة ا ووصل حه لكان حه مائلا على ء ب ويلزم من هذا أن يكون حه أكبر من نصف القطر ح ا وأن تكون النقطة ه خارجة عن المحيط فحينئذ لا يوجد من المستقيم ء ب نقطة مشتركة مع المحيط الا النقطة ا فهو مماس للمحيط في النقطة ا

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال ليكن المستقيم ء ب مماسا للمحيط في النقطة ا فيلزم أن تكون أي نقطة من نقطه ما عدا النقطة ا خارجة عن المحيط فحينئذ اذا وصل من المركز ح الى احدى نقط المستقيم ء ب غير النقطة ا مستقيم مثل حه يكون ح ا < حه ويلزم من هذا أن يكون ح ا عمودا على ء ب وهو المطلوب

ما ينتج من هذه النظرية

ينتج منها أولا انه لا يمكن من نقطة موضوعة على محيط دائرة أن يمد الا مستقيم واحد مماس لانه لو أمكن أن يمد منها مماسان للزم أن يكون كلاهما عمودا على نهاية نصف القطر المار بنقطة التماس ويلزم من هذا امكان اقامة عمودين على مستقيم واحد من نقطة واحدة وقد تقدم انه محال فحينئذ لا يمكن أن يمد من النقطة الموضوعة على المحيط الا مماس واحد وهو المطلوب

وثانيا أن العمود المقام من نقطة التماس على الخط المماس يمر بالمركز

وثالثا أن العمود المنزل من المركز على الخط المماس يمر بنقطة التماس

ورابعا أن المستقيمين المماسين الممتدين من نهايتي قطر دائرة متوازيان لان كلا هما عمود على القطر المذكور

وخامسا أن المستقيمين المماسين اذا كانا متوازيين يكون الوتر الواصل بين نقطتي تماسهما بالمحيط قطرا لان القطر العمود على أحد المماسين يكون أيضا عمودا على الآخر فاذن يمر بنقطتي التماس

وسادسا أن المستقيمين المماسين لمحيط دائرة والمارين بنهايتي وتر غير القطر يلتقيان

وسابعا اذا تقاطع مستقيمان مماسان لا يكون المستقيم المار بنقطتي

التماس قطرا

(الدعوى العاشرة النظرية شكل ٥٥ و ٥٦)

القوسان المنحصران من المحيط بين مستقيمين متوازيين متساويان

أى ان القوسين مثل ط ك و ى ل المنحصرين من المحيط بين مستقيمين متوازيين مثل ا ب و ء هـ متساويان

ولهذه الدعوى ثلاث حالات

الاولى أن يكون المستقيمان المتوازيان قاطعين للمحيط فحينئذ يرسم نصف القطر حـ ع عمودا على الوتر ط ى فيكون أيضا عمودا على موازيه ك ل فاذن تكون النقطة ع وسط كل من القوسين ط ع ى و ك ع ل ويلزم من هذا أن يكون القوس ط ع = للقوس ع ى والقوس ك ع = للقوس ع ل وحيث ان الاشياء المتساوية اذا طرحت منها أشياء متساوية كانت البواقى متساوية يكون

ط ع ـ ك ع = ع ى ـ ع ل أى ان القوس ط ك = ل ى

وهو المطلوب

الثانية أن يكون أحد المتوازيين قاطعا والآخر مماسا كما فى (الشكل ٥٦) فيوصل بين المركز ونقطة التماس ع بنصف القطر حـ ع فيكون عمودا على المماس ء هـ وعلى موازيه ط ى ويلزم من هذا أن تكون النقطة ع وسط القوس ط ع ى وهو المطلوب

الثالثة أن يكون المستقيمان المتوازيان مماسين للمحيط كما فى (الشكل ٥٦) فيرسم القاطع ا ب موازيا لهما فعلى ما ذكر فى الحالة الثانية يكون القوس ط ع = ع ى والقوس ط غ = غ ى ويلزم من هذا أن يكون القوس ع ط غ = للقوس ع ى غ وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا فصل المستقيمان من المحيط قوسين متساويين كانا متوازيين ويشترط فى هذا أن يكون كل من القوسين فى جهة واحدة بالنسبة لكل من المستقيمين

الفاصلين

الفاصلين

(مقدمتان)

النقطتان المتماثلتان بالنسبة لمستقيم نقطتان موضوعتان على عمود واحد على هذا المستقيم بعداهما عن موقع العمود متساويان والمستقيم المذكور يسمى بمحور التماثل

(الدعوى الحادية عشر النظرية شكل ٥٦ رمز ا)

اذا كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة خارجة عن المستقيم المار بمركزيهما فلا بد وأن يكون لهما نقطة أخرى مشتركة مماثلة للاولى بالنسبة لمستقيم المركزين أي اذا كان لمحيطي الدائرتين نقطة مشتركة مثل ا خارجة عن المستقيم ح حَ المار بمركزيهما ح و حَ فلا بد وأن يكون لهما نقطة اخرى مشتركة مثل اَ مماثلة للاولى ا بالنسبة لمستقيم المركزين ح حَ

(برهانها) أن يقال حيث كان ا اَ عمودا على ح حَ و اَ ب = ا ب يكون اَ ح = ا ح و حَ اَ = حَ ا ويلزم من هذا أن يمر المحيط الذي مركزه ح ونصف قطره ح ا بالنقطة اَ وأن يمر المحيط الذي مركزه حَ ونصف قطره حَ ا بالنقطة اَ كذلك

ما ينتج من هذه النظرية

ينتج منها أولا انه اذا تقاطع محيطا دائرتين فالمستقيم المار بمركزيهما يكون عمودا على وسط الوتر المشترك

وثانيا انه اذا تماس محيطا دائرتين فنقطة التماس تكون على المستقيم المار بمركزيهما اذ لو كانت خارجة عنه للزم أن يشترك المحيطان في النقطة المماثلة لها ويلزم من هذا تقاطعهما

(الدعوى الثانية عشر النظرية شكل ٥٦ رمز ب)

اذا كان محيطا دائرتين خارجين عن بعضهما كان البعد بين مركزيهما أكبر

من مجموع نصفى قطريهما

برهانها أن يقال حيث ان م مَ = م ا + مَ اَ + ا اَ يكون م مَ > م ا + مَ اَ وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ٥٦ رمز م)

اذا كان أحد محيطى الدائرتين داخلا فى دائرة المحيط الآخر بدون أن يتلاقيا كان البعد بين مركزيهما أصغر من فاضل نصفى قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون م مَ = م ا − مَ اَ − ا اَ أن يكون م مَ < م ا − مَ اَ وهو المطلوب

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ٥٩)

اذا تماس محيطا دائرتين فى الخارج كان البعد بين مركزيهما مساويا لمجموع نصفى قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ا على المستقيم المار بالمركزين أن يكون م مَ = م ا + ا مَ وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية شكل ٦٠)

اذا تماس محيطا دائرتين فى الداخل كان البعد بين مركزيهما مساويا لفاضل نصفى قطريهما

(برهانها) أن يقال يلزم من كون نقطة التماس ا على المستقيم المار بالمركزين أن يكون م مَ = م ا − مَ ا وهو المطلوب

*(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ٦٠ الثانى)

اذا تقاطع محيطا دائرتين كان البعد بين مركزيهما أصغر من مجموع نصفى قطريهما وأكبر من فاضلهما

(برهانها) أن يقال لو وصل بين احدى نقطتى التقاطع مثل ا والمركزين م مَ

بمستقيمين

بمستقيمين لحدث مثلث اضلاعه البعد بين المركزين ﻫ ح ونصف القطر ﻫ ا ونصف القطر ح ا وقد ثبت فى المقالة الاولى أن أى ضلع من أى مثلث أصغر من مجموع الضلعين الآخرين وأكبر من فاضلهما فاذن يكون البعد بين المركزين أصغر من مجموع نصفى القطرين وأكبر من فاضلهما وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن لكل من النظرية الثانية عشر والثالثة عشر والرابعة عشر والخامسة عشر والسادسة عشر عكسا صحيحا سهل البرهنة أى اذا كان البعد بين المركزين أصغر من مجموع نصفى القطرين وأكبر من فاضلهما يتقاطع المحيطان لانهما لو لم يتقاطعا لكانا اما خارجين أو داخلين أو متماسين فى الخارج أو متماسين فى الداخل فان كانا خارجين يلزم أن يكون البعد بين المركزين أكبر من مجموع نصفى القطرين وان كانا داخلين يلزم أن يكون البعد بين المركزين أصغر من فاضل نصفى القطرين وان كانا متماسين فى الخارج يلزم أن يكون البعد بين المركزين مساويا لمجموع نصفى القطرين وان كانا متماسين فى الداخل يلزم أن يكون بعد المركزين مساويا لفاضل نصفى القطرين وكل ذلك خلاف المفروض فحينئذ يتقاطع المحيطان وهو المطلوب

(الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ٦١)

الزوايا المركزية المتساوية اقواسها متساوية وبالعكس أى الاقواس المتساوية زواياها المركزية متساوية سواء كان ذلك فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية أى اذا كانت الزاوية المركزية ا ح ب مساوية للزاوية المركزية ى ح ﻫ يكون القوس ا ب مساويا للقوس ى ﻫ وبالعكس أى اذا كان القوس أ ب مساويا للقوس ى ﻫ تكون الزاوية المركزية ا ح ب مساوية للزاوية المركزية ى ح ﻫ

(برهان القضية الاولى) أن يقال لو طبقت الزاوية ا ح ب على مساويتها ى ح ﻫ لوقعت النقطة ا على النقطة ى والنقطة ب على النقطة ﻫ

ويلزم من هذا أن يقع القوس ا ب على القوس د هـ فاذن يكونان متساويين وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو لم تكن الزاوية ا ح ب مساوية للزاوية د ح هـ لكانت اما أكبر منها أو أصغر منها فلو كانت الزاوية ا ح ب أكبر من الزاوية د ح هـ بأن أخذ من الزاوية الكبرى زاوية مثل ا ح و مساوية للزاوية د ح هـ لكان القوس ا و مساويا للقوس د هـ بمقتضى ماسبق وقد فرض أن القوس ا ب مساو للقوس د هـ فيلزم أن يكون القوس ا و مساويا للقوس ا ب ويلزم من هذا أن يكون الجزء مساويا للكل وهو محال فقد ثبت بهذا انه لا يمكن أن تكون الزاوية ا ح ب أكبر من الزاوية د ح هـ وبمثل هذا يبرهن على انه لا يمكن أن تكون الزاوية ا ح ب أصغر من الزاوية د ح هـ وبه يثبت أن الزاوية ا ح ب مساوية للزاوية د ح هـ وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ٦٢)

اذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما مساوية للنسبة المذكورة سواء كان ذلك فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية

أى اذا كانت النسبة بين الزاويتين المركزيتين ا ح ب و د ح هـ كالنسبة بين عددين صحيحين كانت النسبة بين قوسيهما ا ب و د هـ مساوية للنسبة المذكورة أعنى تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية د ح هـ :: القوس ا ب : القوس د هـ سواء كان ذلك فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية

(برهانها) أن يقال لو جعلت زاوية مثل الزاوية م مقياسا مشتركا وفرض أن الزاوية ا ح ب تشتمل على الزاوية م سبع مرات وأن الزاوية د ح هـ تشتمل على الزاوية م أربع مرات لكانت الاقواس ا و و و ز و ز ح و ح ط و ط ى و ى ك و ك ب وكذلك الاقواس د ل و ل ن

و ىس و سه متساوية لتساوى الزوايا المركزية احو و وحر
و رحح و ححط و طحب و بحك و كجب وكذلك
الزوايا المركزية دحل و لحى و ىحس و سحه ويلزم من هذا
أن تكون نسبة القوس الكامل اب الى القوس الكامل ده كنسبة
٧ الى ٤ وأن تكون
نسبة الزاوية احب : الزاوية دحه :: القوس اب : القوس ده
وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كانت النسبة بين القوسين اب و ده كالنسبة بين عددين صحيحين
كانت النسبة بين الزاويتين احب و دحه كالنسبة بين العددين
المذكورين وحينئذ تكون
نسبة القوس اب : القوس ده :: الزاوية احب : الزاوية
دحه لانه يلزم من تساوى القسى الجزئية او و وز و رح الخ
و دل و لى الخ تساوى الزوايا الجزئية احو و وحر و رحح الخ
و دحل و لحى الخ

(الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ٦٣)

النسبة بين الزاويتين المركزيتين تساوى النسبة بين قوسيهما سواء كان ذلك
فى دائرة واحدة أوفى دوائر متساوية
أى ان النسبة بين الزاويتين المركزيتين احب و احد تساوى النسبة
بين قوسيهما اب و اد على أى حالة كانت سواء كان ذلك فى دائرة
واحدة أوفى دوائر متساوية
أى ان نسبة الزاوية احب : الزاوية احد :: القوس اب :
القوس اد
(برهانها) أن يقال لو لم تكن هذه المناسبة صحيحة لكان حدها الرابع اما اكبر
من القوس اد أو أصغر منه فان كان أكبر من القوس اد بان كان

مساويا للقوس او مثلا لكانت

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح ء :: القوس ا ب : القوس ا و

فلو تصورنا أن القوس ا ب مقسوم الى أقسام متساوية كل منها أصغر من القوس ء و لوقعت احدى نقط التقاسيم مثل النقطة هـ بين النقطة ء والنقطة و فلو وصل نصف القطر ح هـ لكانت النسبة بين القوسين ا ب و ا هـ كالنسبة بين عددين صحيحين وحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح هـ :: القوس ا ب : القوس ا هـ فلو قورنت هذه المناسبة بالمناسبة المتقدمة لحدث

نسبة الزاوية ا ح ء : الزاوية ا ح هـ :: القوس ا و : القوس ا هـ وحيث ان الحد الاول من هذه المناسبة أصغر من تاليه يلزم أن يكون الحد الثالث أصغر من تاليه ويلزم من هذا أن يكون الكل أصغر من الجزء وهو محال فقد ثبت بهذا انه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح ء :: القوس ا ب : قوس اكبر من ا ء وبمثل هذا يبرهن على انه لا يمكن أن تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح ء :: القوس ا ب : قوس أصغر من القوس ا ء فحينئذ تكون

نسبة الزاوية ا ح ب : الزاوية ا ح ء :: القوس ا ب : القوس ا ء وهو المطلوب

(فى قياس الزوايا)

قياس الكمية هو البحث عن النسبة بين هذه الكمية والوحدة التى من نوعها فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كان مقدار أى زاوية عبارة عن النسبة بين هذه الزاوية والزاوية القائمة .

وحيث تبين من النظرية المتقدمة انه يمكن ابدال النسبة بين أى زاويتين مركزيتين بالنسبة بين قوسيهما فلا مانع من مقارنة قوس الزاوية المركزية بربع المحيط بدل مقارنتها بالزاوية القائمة وهذا معنى قولهم ان الزاوية المركزية

تقاس

تقاس بالقوس المحصور بين ضلعيها

ولتسهيل هذه المقارنة يقسم محيط الدائرة الى ٣٦٠ جزأ متساوية تسمى درجات وكل درجة الى ٦٠ دقيقة وكل دقيقة الى ٦٠ ثانية وهكذا فاذا كان القوس المحصور بين ضاعى زاوية مركزية محتويا على ٢٤ درجة فقياس هذه الزاوية يكون $\frac{٢٤}{٩٠}$ أى $\frac{٤}{١٥}$

(تنبيه)

النسبة بين قطعين فى دائرة واحدة أو فى دوائر متساوية كالنسبة بين قوسيهما

(الدعوى العشرون النظرية شكل ٦٤ و ٦٥)

كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

أى ان كل زاوية محيطية مثل الزاوية ـ ا ى تقاس بنصف القوس ى ـ المحصور بين ضلعيها

(برهانها) أن يقال لو فرض المركز ح واقعا بين ضاعى الزاوية ـ ا ى كما فى (الشكل ٦٤) ووصل القطر ا هـ ونصفا القطرين ـ ح و ح ى لكانت الزاوية ـ ح هـ الخارجة عن المثلث ـ ا ح مساوية لمجموع الزاويتين ـ ا ح و ح ـ ا وحيث ان الضلع ح ا يساوى الضلع ح ـ تكون الزاوية ح ـ ا = للزاوية ـ ا ح ويلزم من هذا أن تكون الزاوية ـ ح هـ ضعف الزاوية ـ ا ح وحيث ان الزاوية المركزية ـ ح هـ تقاس بالقوس ـ هـ ينتج من ذلك أن الزاوية ـ ا ح تقاس بنصف القوس ـ هـ وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ح ا ى تقاس بنصف القوس هـ ى فينتج من هذا أن الزاوية الكلية ـ ا ى تقاس بنصف القوس الكلى ـ هـ ى وهو المطلوب

ولو فرض المركز ح خارجا عن الزاوية ـ ا ى كما فى (الشكل ٦٥) ثم وصل القطر ا هـ لحدثت زاوية ى ا هـ قياسها نصف القوس ى هـ والزاوية ـ ا هـ قياسها نصف القوس ـ هـ ويلزم من هذا أن تقاس الزاوية ـ ا ى التى هى فاضل الزاويتين ـ ا هـ و ى ا هـ بنصف فاضل

القوسين ب هـ و د هـ
فقد ثبت بهذا أن كل زاوية محيطية تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها

(نتائج)

ينتج من هذه النظرية أولا أن الزوايا المحيطية مثل ب ا ح و ب د ح الخ المرسومة فى قطعة واحدة متساوية لان نصف القوس ب و ح مقياس لكل من تلك الزوايا كما فى (الشكل ٦٦)

وثانيا أن الزاوية المرسومة فى نصف الدائرة مثل الزاوية ب ا د كما فى (الشكل ٦٧) تكون قائمة لانها تقاس بنصف نصف المحيط ب و د أى بربع المحيط

وثالثا أن الزاوية المرسومة فى قطعة أكبر من نصف الدائرة مثل الزاوية ب ا ح من (الشكل ٦٦) تكون حادة لانها تقاس بنصف القوس ب و ح الاقل من نصف المحيط

ورابعا أن الزاوية المرسومة فى قطعة أصغر من نصف الدائرة مثل الزاوية ب و ح من (الشكل ٦٦) تكون منفرجة لانها تقاس بنصف القوس ب ا ح الاكبر من نصف المحيط

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية شكل ٦٩)

الزاوية الحادثة من مماس ووتر تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها أى ان الزاوية الحادثة من مماس ووتر مثل الزاوية ب ا ح تقاس بنصف القوس ا م د ح المحصور بين ضلعيها

(برهانها) أن يوصل القطر ا د المار بنقطة التماس ا فيكون نصف القوس ا م د معيارا للزاوية القائمة ب ا د ونصف القوس د ا ح معيارا للزاوية المحيطية د ا ح ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس الكلى ا م د ح معيارا للزاوية الكلية ب ا ح وهو المطلوب

وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ح ا هـ تقاس بنصف القوس ا ح المحصور بين ضلعيها

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثانى)

كل زاوية رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس المحصور بين امتدادى ضلعيها

أى ان كل زاوية مثل ب ا ح رأسها بين المركز والمحيط تقاس بنصف القوس ب ح المحصور بين ضلعيها مضافا اليه نصف القوس هـ و المحصور بين امتدادى ضلعيها

(برهانها) أن يوصل الوتر هـ ح فتكون الزاوية ب ا ح الخارجة عن المثلث ا ح هـ مساوية لمجموع الزاويتين الداخلتين ا هـ ح و هـ ح ا وحيث ان الزاوية ا هـ ح تقاس بنصف القوس ب ح والزاوية هـ ح ا تقاس بنصف القوس هـ و ينتج أن الزاوية ب ا ح تقاس بنصف القوس ب ح مضافا اليه نصف القوس هـ و وهو المطلوب

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ٦٩ الثالث)

كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط تقاس بنصف القوس المقعر نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس المحدب المحصور كذلك بينهما

أى ان كل زاوية رأسها خارجة عن المحيط مثل الزاوية ب ا ح تقاس بنصف القوس ب ح المقعر نحو رأسها المحصور بين ضلعيها مطروحا منه نصف القوس ء هـ المحدب المحصور كذلك بينهما

(برهانها) أن يوصل الوتر ء ب فتكون الزاوية ا = ح ء ب ــ ء ب ا وحيث ان الزاوية ح ء ب تقاس بنصف القوس ح ب والزاوية ء ب ا تقاس بنصف القوس ء هـ ينتج أن الزاوية ا تقاس بنصف القوس ح ب ــ نصف القوس ء هـ وهو المطلوب

(تنبيه)

اذا كان أحد ضلعى الزاوية قاطعا والآخر مماسا أو كلاهما مماسا للمحيط الدائرة فلا تزال هذه النظرية صحيحة والبرهان واحد

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ٦٨)

الزاويتان المتقابلتان من كل شكل رباعى داخلى متممتان لبعضهما
أى ان مجموع الزاويتين المتقابلتين مثل ب و د من كل شكل رباعى داخلى مثل ا ب ج د يساوى قائمتين لان الزاوية ب تقاس بنصف القوس ا د ج والزاوية د تقاس بنصف القوس ا ب ج فيكون نصف المحيط مقياسا لمجموع الزاويتين ب و د فاذن يكون مجموعهما مساويا لقائمتين وهو المطلوب

وبالعكس اذا وجد فى شكل رباعى مثل ا ب ج د زاويتان متقابلتان متممتان لبعضهما كان ذلك الشكل قابلا للرسم فى الدائرة

لانه لو مر محيط دائرة بالنقط الثلاث ا د ج لكان نصف القوس ا م ج معيارا للزاوية د ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس ا د ج معيارا للزاوية ب المتممة للزاوية د وهذا لا يتاتى الا اذا كانت الزاوية ب محيطية وهو المطلوب

(فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الاولى والثانية)

(الدعوى الاولى العملية شكل ٧٠)

اذا كان المطلوب تنصيف مستقيم محدود مثل المستقيم ا ب فطريقة ذلك أن تؤخذ فتحة بالبيكار أكبر من نصف الخط ا ب ويركز فى النقطة ا ويرسم قوسان أحدهما فوق الخط والآخر تحته ثم يركز فى النقطة ب ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق الخط ونقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على وسط المستقيم المعلوم والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل ا د و د ب و ب هـ و هـ ا لكان الشكل الحادث معينا وقد تقرر فى المقالة الاولى أن قطرى المعين ينصفان بعضهما عمادا فقد ثبت بهذا أن البعد ا ج = البعد ج ب

(تنبيه)

هذه العملية تستعمل لاقامة عمود على وسط مستقيم محدود

الدعوى

(الدعوى الثانية العملية شكل ٧١)

اذا كان المطلوب اقامة عمود على مستقيم من نقطة معينة عليه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم حـ ب والنقطة المعينة عليه ا ثم يؤخذ من المستقيم حـ ب نقطة مثل حـ على يمين النقطة ا ونقطة أخرى مثل ب على يسارها بحيث يكون البعد ا ب = للبعد ا حـ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار أكبر من ا حـ ويركز فى النقطة حـ ويرسم قوس دائرة فوق الخط حـ ب أو تحته ثم يركز فى النقطة ب ويرسم قوس دائرة كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين والنقطة المعينة ا فهذا المستقيم يكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل حـ ى و ى ب لحدث مثلث متساوى الساقين وقد تقرر فى المقالة الاولى أن المستقيم المار من رأس المثلث المتساوى الساقين الى وسط قاعدته يكون عمودا عليها

(تنبيه)

اذا علم مستقيم مثل حـ ب ونقطة معينة عليه مثل ا وكان المطلوب أن يمد من النقطة ا مستقيم يصنع مع المستقيم المعلوم حـ ب زاوية قائمة تعمل العملية المتقدمة بعينها

(الدعوى الثالثة العملية شكل ٧٢ الثانى)

اذا كان المطلوب انزال عمود على مستقيم معلوم من نقطة خارجة عنه فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم حـ ب والنقطة المعلومة ا ويؤخذ على حـ ب نقطتان مثل ى و هـ ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ى ا ويركز فى النقطة ى ويرسم محيط دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر هـ ا ويركز فى النقطة هـ ويرسم محيط دائرة فيتقاطع المحيطان فى النقطة ا وفى نقطة أخرى مثل و ثم يوصل مستقيم بين نقطتى التقاطع فيكون هو العمود المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية أن المستقيم هـ ى المار بالمركزين هـ و ى

عمودعلى وسط الوتر المشترك ا ب وقد تقرر فى المقالة الاولى انه اذا كان أحد مستقيمين عمودا على آخر كان الآخر عمودا عليه

(الدعوى الرابعة العملية شكل ٧٣)

اذا علمت نقطة على مستقيم معلوم وكان المطلوب مد مستقيم منها يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية تساوى زاوية معلومة فطريقة ذلك أن تفرض النقطة المعلومة ا والمستقيم المعلوم ا ب والزاوية المعلومة ك فيركز فى رأس الزاوية ك وتؤخذ فتحة بالبيكار بقدر مايراد ويرسم قوس مثل ح ل ينتهى بضلعى الزاوية ثم يركز فى النقطة ا ويرسم قوس غير محدود مثل ب و ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الوتر ل ح ويركز فى النقطة ب ويرسم قوس يقطع القوس غير المحدود ب و فى نقطة مثل ى ثم يوصل ا ى فتكون الزاوية الحادثة ى ا ب مساوية للزاوية المعلومة ك

والدليل على صحة هذه العملية أن نصف القطر ا ب = ك ح والوتر ب ى = ح ل فيلزم أن يكون القوس ب ى مساويا للقوس ل ح ويلزم من هذا أن تكون الزاوية ب ا ى = ل ك ح

(الدعوى الخامسة العملية شكل ٧٤)

اذا كان المطلوب تنصيف قوس معلوم أو زاوية مفروضة فطريقة تنصيف القوس المعلوم كالقوس ا ب أن يوصل الوتر ا ب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار أكبر من نصف الوتر ا ب ويركز فى النقطة ا ويرسم قوسان أحدهما فوق الوتر والآخر تحته ثم يركز فى النقطة ب ويرسم قوسان كذلك ثم يوصل مستقيم بين نقطة تقاطع القوسين اللذين فوق الوتر ونقطة تقاطع القوسين اللذين تحته فهذا المستقيم يكون عمودا على وسط الوتر ا ب ومنصفا للقوس ا هـ ب

وطريقة تنصيف الزاوية المعلومة كالزاوية ا ح ب أن يركز فى النقطة ح وتؤخذ فتحة بالبيكار بقدر مايراد ويرسم قوس مثل ا هـ ب ينتهى بضلعى

الزاوية ثم يقام عمود على وسط الوتر ا ب فهذا العمود ينصف الزاوية ا ح ب

(تنبيه)

يمكن بالطريقة المتقدمة أن يقسم القوس المعلوم أو الزاوية المعلومة الى أربعة أجزاء متساوية أو ثمانية أو ستة عشر وهكذا ،

(الدعوى السادسة العملية شكل ٧٥)

اذا علم مستقيم ونقطة خارجة عنه وكان المطلوب مد مستقيم يمر بالنقطة المعلومة ويوازى المستقيم المعلوم فطريقة ذلك أن يفرض المستقيم المعلوم ب ح والنقطة المعلومة ا وتؤخذ نقطة من المستقيم المعلوم كالنقطة ه ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر البعد ا ه ويركز فى النقطة ا ويرسم القوس غير المحدود ه و ثم يركز فى النقطة ه ويرسم القوس ا ن ويؤخذ ه ى = ا ن ثم يوصل المستقيم ا ى فيكون هو الموازى المطلوب والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل المستقيم ا ه لظهر أن الزاويتين المتبادلتين الداخلتين ا ه ن و ه ا ى متساويتان ويلزم من هذا أن يكون المستقيمان ب ح و ا ى متوازيين

(الدعوى السابعة العملية شكل ٧٦)

اذا علم زاويتان من مثلث وكان المطلوب ايجاد الزاوية الثالثة فطريقة ذلك أن يفرض ا احدى الزاويتين المعلومتين و ب الزاوية الاخرى ويرسم المستقيم غير المحدود ى ه ن ثم تنشأ فى النقطة ه زاوية ى ه ح = ا وزاوية ح ه ع = ب فالزاوية الباقية ع ه ن تكون الزاوية الثالثة المطلوبة لان مجموع هذه الزوايا الثلاث يساوى قائمتين

(الدعوى الثامنة العملية شكل ٧٧)

اذا علم من مثلث ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يفرض ب أحد الضلعين المعلومين و ح الضلع الآخر و ا الزاوية المنحصرة بينهما ويرسم المستقيم غير المحدود ى ه ثم تنشأ فى

النقطة د زاوية هـ د ن تساوى الزاوية المعلومة ا ثم يؤخذ د ع = ب و د ح = ح ثم يوصل ع ح فيكون د ع ح هو المثلث المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية شكل ٧٨)

أذا علم من مثلث ضلع وزاويتان وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يقال ان الزاويتين المعلومتين اما أن تكونا مجاورتين للضلع المعلوم أو احداهما مجاورة له والاخرى مقابلة له ففى هذه الحالة الاخيرة يبحث عن الزاوية الثالثة من المثلث بالطريقة المتقدمة فى العملية السابعة فيصير كلتا الزاويتين المجاورتين للضلع معلومة فحينئذ يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه الجزء د هـ بقدر الضلع المعلوم ثم تعمل فى النقطة د زاوية هـ د ن تساوى احدى الزاويتين المجاورتين للضلع المعلوم وتعمل فى النقطة هـ زاوية د هـ ع تساوى المجاورة الاخرى فيتقاطع الخطان د ن و هـ ع فى نقطة مثل ح وحينئذ يكون د هـ ح هو المثلث المطلوب

(الدعوى العاشرة العملية شكل ٧٩)

اذا علم من مثلث اضلاعه الثلاثة وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يفرض ا احد الاضلاع الثلاثة و ب الضلع الآخر و ح الضلع الثالث فيرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه بعد د هـ يساوى الضلع ا ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الضلع الثانى ب ويركز فى النقطة هـ ويرسم قوس دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الضلع الثالث ح ويركز فى النقطة د ويرسم قوس دائرة يقطع القوس الاول فى نقطة مثل ن ثم يوصل د ن و هـ ن فيكون د هـ ن هو المثلث المطلوب

(تنبيه)

يشترط فى امكان حل هذه المسئلة أن يكون مجموع كل ضلعين أكبر من الثالث وفاضلهما أصغر منه

*(الدعوى

(الدعوى الحادية عشر العملية شكل ٨٠ و ٨١ و ٨٢)

اذا علم من مثلث ضلعان وزاوية مقابلة لاحدهما وكان المطلوب رسم المثلث فطريقة ذلك أن يفرض الضلعان المعلومان ا و ب والزاوية المعلومة ح هى المقابلة للضلع ب ومن المعلوم ان الزاوية المعلومة ح اما أن تكون قائمة أو منفرجة أو حادة فان كانت قائمة أو منفرجة كان وترها أكبر أضلاع المثلث وحينئذ لرسم المثلث تنشأ زاوية مثل هـ د ں تساوى الزاوية المعلومة ح ويؤخذ د هـ = ا ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الضلع المعلوم ب ويركز فى النقطة هـ ويرسم قوس يقطع الخط د ں فى نقطة مثل ں ويوصل المستقيم هـ ں فيكون د هـ ں هو المثلث المطلوب وان كانت الزاوية المعلومة ح حادة فان كان الضلع المقابل لها ب أكبر من الضلع ا أجريت العملية المتقدمة بعينها وحينئذ يكون د هـ ں هو المثلث المطلوب كما فى (الشكل ٨١)

وان كان الضلع المقابل لها ب أصغر من الضلع ا فالقوس الذى مركزه هـ ونصف قطره هـ ں = ب يقطع الضلع د ں فى نقطتين مثل ں و ع موضوعتين فى جهة واحدة بالنسبة للنقطة د فاذن يحدث مثلثان د هـ ں و د هـ ع كلاهما يوافق حل المسئلة كما فى (الشكل ٨٢)

(تنبيه)

اعلم ان هذه المسئلة يستحيل حلها فى جميع الاحوال اذا كان الضلع ب أصغر من العمود المنزل من النقطة هـ على الخط د ں

(الدعوى الثانية عشر العملية شكل ٨٣)

اذا علم ضلعان والزاوية المنحصرة بينهما من شكل متوازى الاضلاع وكان المطلوب رسمه فطريقة ذلك أن يفرض أحد الضلعين المعلومين ا والضلع الآخر ب والزاوية المنحصرة بينهما ح ثم يرسم خط د هـ = ا وتنشأ فى النقطة د زاوية ں د هـ = ح ويؤخذ د ں = ب

ويرسم قوسان مركز أحدهما النقطة ن ونصف قطره ن ع = ى هـ ومركز الآخر النقطة هـ ونصف قطره هـ ع = ى ن ويوصل ن ع و هـ ع فيكون ى هـ ع ن هو المتوازى الاضلاع المطلوب

والدليل على صحة هذه العملية ان الاضلاع المتقابلة متساوية بالعمل وقد تقرر فى المقالة الاولى ان الشكل الرباعى اذا تساوت اضلاعه المتقابلة كان متوازى الاضلاع ومن المعلوم ان هذا الشكل قد اشتمل على معالم المسئلة بشروطها

(تنبيه)

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة وكان الضلعان المحيطان بها غير متساويين كان الشكل الحادث مستطيلا وان كانا متساويين كان مربعا

(الدعوى الثالثة عشر العملية شكل ٨٤)

اذا كان المطلوب تعيين مركز دائرة أو قوس معلوم فطريقة ذلك أن يؤخذ من المحيط أو من القوس ثلاث نقط مثل ا و ب و ح ويوصل ا ب و ب ح بالفعل أو بالوهم ثم يقام عمود ى هـ على وسط ا ب وعمود ن ع على وسط ب ح فالنقطة و التى هى ملتقى العمودين تكون هى المركز المطلوب

(تنبيه)

هذه الطريقة تستعمل لرسم محيط دائرة يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح المعلومة وتستعمل أيضا لرسم محيط دائرة يكون المثلث المعلوم ا ب ح داخله

(الدعوى الرابعة عشر العملية شكل ٨٥)

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمس محيط دائرة معلومة و يمر بنقطة معينة فطريقة ذلك أن يقال اذا كانت النقطة المعلومة ا على المحيط يوصل نصف القطر ح ا ويقام العمود ا ى على ح ا فيكون ا ى هو المماس المطلوب

واذا

واذا كانت النقطة المعلومة ا خارجة عن المحيط يوصل المستقيم ح ا بين المركز والنقطة ا وينصف ح ا بنقطة مثل و ويرسم محيط دائرة نصف قطره يساوى ح و ومركزه و فهذا المحيط يقطع المحيط المعلوم فى نقطتين مثل ب و ى فاذا وصل ا ب و ا ى كان كل منهما مماسا للمحيط المعلوم ومارا بالنقطة المعلومة

والدليل على صحة هذه العملية انه لو وصل ح ب و ح ى لظهر أن كلا من الزاويتين ح ب ا و ح ى ا قائمة لان كلا منهما مرسومة فى نصف الدائرة

(تنبيه)

اعلم ان المماس ا ب يساوى المماس ا ى والزاوية ب ا ح تساوى الزاوية ى ا ح لان المثلث ا ب ح القائم الزاوية فى ب يساوى المثلث ا ى ح القائم الزاوية فى ى لان الوتر ا ح مشترك والضلع ح ب يساوى الضلع ح ى

(نتيجة)

ينتج من هذه العملية طريقة رسم محيط دائرة يمس محيطى زاوية معلومة

(الدعوى الخامسة عشر العملية شكل ٨٧ و ٨٧ ثانى)

اذا علم مثلث كالمثلث ا ب ح وكان المطلوب رسم دائرة داخله فطريقة ذلك ان تنصف الزاوية ا بالمستقيم ا و والزاوية ب بالمستقيم ب و فالنقطة و التى هى ملتقى المستقيمين تكون مركز الدائرة المطلوبة فاذا أنزل من النقطة و اعمدة وى و وهـ و وں على اضلاع المثلث فهذه الاعمدة تكون متساوية كما تقرر فى المقالة الاولى وحينئذ المحيط الذى مركزه النقطة و ونصف قطره العمود وى يكون مماسا لاضلاع المثلث المعلوم

(تنبيهان)

الاول حيث ان بعد النقطة و عن الضلع ب ح كبعدها عن الضلع ا ح تكون على المستقيم المنصف للزاوية ا ح ب

ويعلم من ذلك ان الخطوط المستقيمة المنصفة لزوايا مثلث تتقاطع في نقطة واحدة

الثاني اذا امتد الخطان المنصفان لزاويتين خارجتين من مثلث كالزاويتين م ب ح و ب ح ك فنقطة تقاطعهما و تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ب ح ولامتدادى الضلعين الآخرين من المثلث واذا امتد الخطان المنصفان للزاويتين ل ب ا و ب ا س فنقطة تقاطعهما وَ تكون مركز الدائرة مماسة للضلع ب ا ولامتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

ولو مد الخطان المنصفان للزاويتين ع ا ح و ا ح ص لكانت نقطة تقاطعهما وَ مركز الدائرة مماسة للضلع ا ح ولامتدادى الضلعين الآخرين من المثلث

فحينئذ يمكن ان يرسم أربع دوائر تمس ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة

(الدعوى السادسة عشر العملية شكل ٨٨ و ٨٩)

اذا علم مستقيم مثل ا ب وزاوية مثل ح وكان المطلوب أن يرسم على المستقيم ا ب قطعة دائرة كل زاوية مرسومة فيها مساوية للزاوية المعلومة ح فطريقة ذلك ان يمد المستقيم ا ب جهة ى ثم تنشأ في النقطة ب زاوية ى ب ه = ح ويقام ب و عمودا على ب ه و ع و عمودا على وسط ا ب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر و ب ويركز في النقطة و التي هي ملتقى العمودين وترسم دائرة فتكون القطعة ا م ب هي المطلوبة

والدليل على صحة هذه العملية ان الخط ب ن مماس لكونه عمودا على نهاية نصف القطر و ب ويلزم من هذا أن يكون نصف القوس ا ك ب معيار الزاوية ا ب ن وللزاوية المحيطية ا م ب فاذن تكون الزاوية ا م ب = ا ب ن = ه ب ى = ح ويلزم من هذا أن تكون

كل

كل زاوية مرسومة فى القطعة ا م ب مساوية للزاوية المعلومة ح

(تنبيه)

اذا كانت الزاوية المعلومة قائمة كانت القطعة المطلوبة نصف دائرة قطرها الخط المعلوم

تمت المقالة الثانية على يد المتوكل على ربه المعيد المبدى على عزت افندى * أحد خوجات العلوم الرياضية والطبيعية بمدرسة المهندسخانة الخديوية

(دروس فى المقالة الثالثة)

المقالة الثالثة يبحث فيها عن مساحة الاشكال المستقيمة الاضلاع وعن خواص الاشكال المتشابهة

(الحدود)

(حد ١) مساحة الشئ تعيين ما فيه من أمثال الوحدة الخطية او ابعاضها ان كان الشئ خطا أو امثال مربعها كذلك ان كان سطحا أو امثال مكعبها كذلك ان كان جسما

(حد ٢) الشكلان المتكافئان شكلان متساويان فى المساحة سواء كانا متشابهين أو غير متشابهين فالدائرة مثلا يمكن ان تكافئ مربعا كما ان المثلث يمكن ان يكافئ مستطيلا أو مربعا أو دائرة أو شكلا مخمسا أو مسدسا أو نحو ذلك

ولا يكون الشكلان متساويين الا اذا أمكن انطباق أحدهما على الآخر انطباقا كليا كالدائرتين المرسومتين ببعدين متساويين وكالمثلثين ذوى الاضلاع المتناظرة المتساوية

(حد ٣) ارتفاع متوازى الاضلاع هو كما فى (الشكل ٩٣) العمود مثل هو المحصور بين ضلعين متقابلين مثل ا ب و حـ ء مأخوذين قاعدتين له

(حد ٤) ارتفاع المثلث هو كما فى (الشكل ٩٤) العمود مثل اء النازل من رأس زاوية من زواياه مثل ا على الضلع المقابل لها مثل ب حـ المأخوذ قاعدة له

(حد ٥) ارتفاع شبه المنحرف هو كما فى (الشكل ٩٥) العمود مثل هو المحصور بين الضلعين المتوازيين مثل ا ب و حـ ء المأخوذين قاعدتين له

(الدعوى الاولى النظرية شكل ٩٩ و ١٠٠)

نسبة المستطيلين المتحدى الارتفاع الى بعضهما كنسبة قاعدتيهما

فالمستطيلان مثل ا ب حـ ء و ا هـ و ء المتحدان فى الارتفاع اء نسبة

حدهما : الآخر :: القاعدة ا ب : القاعدة اهـ

(برهانها) أن نفرض أولا أن بين القاعدتين ا ب و اهـ مقياسا مشتركا مثل م بحيث تكون

القاعدة ا ب = ٧ م مثلا

والقاعدة اهـ = ٤ م

فيكون ا ب : اهـ :: ٧ م : ٤ م وبجعل م = ١ يكون

ا ب : ا هـ :: ٧ : ٤

فاذا قسمنا القاعدة ا ب الى سبعة اجزاء متساوية كانت القاعدة اهـ محتوية على أربعة اجزاء منها واذا اقمنا من كل نقطة من نقط التقاسيم عمودا على ا ب انقسم المستطيل ا ب ح د الى سبعة مستطيلات متساوية لان قواعدها متساوية وارتفاعاتها كذلك

ومن حيث ان المستطيل اهـ و د يحتوى على أربعة مستطيلات منها تكون نسبة المستطيل ا ب ح د : المستطيل اهـ و د :: ٧ : ٤

فينتج من مقارنة هذه المناسبة بالمناسبة السابقة التى هى القاعدة ا ب : القاعدة اهـ :: ٧ : ٤ ان

نسبة المستطيل ا ب ح د : المستطيل اهـ و د :: القاعدة ا ب : القاعدة ا هـ وهو المطلوب

وثانيا انه اذا لم يكن بين القاعدتين ا ب و اهـ مقياس مشترك تكون نسبة المستطيل ا ب ح د : المستطيل اهـ و د :: القاعدة ا ب : القاعدة ا هـ

لانه لو لم تكن هذه المناسبة صحيحة لكان الحد الرابع اما أكبر من القاعدة اهـ أو أصغر منها

فلو فرضناه أكبر من اهـ بان جعلناه مثل ا و لكان ا ب ح د : اهـ و د :: ا ب : ا و ولو قسمنا القاعدة ا ب الى أقسام متساوية بشرط ان يكون القسم الواحد أصغر من البعد هـ و لوقعت بالاقل نقطة من نقط التقاسيم مثل ى بين هـ و و اذا أقمنا منها عمودا

مثل

مثل ب ك على ا ب يحدث مستطيل اب ك د فيلزم أن تكون
نسبة المستطيل ا ب ح د : المستطيل ا ب ك د :: ا ب : ا ك
لانّ بين القاعدتين ا ب و ا ب مقياسا مشتركا
وحيث انّ المقدمات المناظرة متساوية فى هاتين المتناسبتين يتركب من
التوالى متناسبة هى
ا هـ ن د : ا ب ك د :: ا و : ا ب
وحيث انّ الحدّ الاوّل من هذه المتناسبة أصغر من الحدّ الثانى يلزم أن يكون
الحدّ الثالث أصغر من الحدّ الرابع والواقع هنا عكسه فلا تكون هذه المتناسبة
صحيحة وحيث انها ناتجة من متناسبتين يكون الغلط فى احداهما أو فيهما
معا وحيث ان المتناسبة الثانية
ا ب ح د : ا ب ك د :: ا ب : ا ب صحيحة بالبرهان السابق
يكون الغلط حاصلا فى المتناسبة الاولى
ا ب ح د : ا هـ ن د :: ا ب : ا و فحينئذ الحدّ الرابع لا يمكن
أن يكون أكبر من القاعدة ا هـ
وبمثل هذا يبرهن على أن الحدّ الرابع لا يمكن أن يكون أصغر من القاعدة ا هـ
فحينئذ تكون نسبة المستطيلين المتحدى الارتفاع الى بعضهما كنسبة
قاعدتيهما وهو المطلوب اثباته

(الدعوى الثانية النظرية شكل ١٠١)

نسبة أى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاوّل
فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه
فاذا رمز بالحرف س لمستطيل قاعدته ن وارتفاعه ع وبالحرف
ص لمستطيل اخر قاعدته نَ وارتفاعه عَ يكون س : ص
:: ن × ع : نَ × عَ
(برهانه) أن يتصوّر مستطيل ثالث مثل م. قاعدته تساوى قاعدة

المستطيل الاول وارتفاعه يساوى ارتفاع المستطيل الثانى فيكون

س : م :: ع : عَ و

م : ص :: ں : ںَ فاذا ضربنا حدود المتناسبة الاولى فى حدود المتناسبة الثانية بالترتيب يحدث

س × م : م × ص :: ع × ں : عَ × ںَ وبقسمة حدى المتناسبة الاولى على م ينتج

س : ص :: ع × ں : عَ × ںَ وهو المطلوب اثباته

* (فى مساحة المستطيل) *

مساحة المستطيل هى نسبته الى مستطيل آخر مأخوذ وحدة وحيث ثبت فى النظرية المتقدمة أن نسبة أى مستطيلين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه ينتج أنه اذا جعل أحد المستطيلين وحدة للقياس علمت مساحة المستطيل الآخر بقسمة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه على حاصل ضرب قاعدة وحدة القياس فى ارتفاعه

* (مثال ذلك) *

اذا كان المستطيل س قاعدته ں = ٦م وارتفاعه ع = ٤م

فما تكون مساحته بالنسبة للمستطيل ص الذى قاعدته ںَ = ٣م

وارتفاعه عَ = ٢م

فالجواب أن يقال ان نسبة مساحة الاول س الى الثانى ص كنسبة حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه أى ٦ × ٤ الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه أى ٣ × ٢ أو $\frac{س}{ص} = \frac{٦ \times ٤}{٣ \times ٢} = ٤$

أعنى ان المستطيل س يحتوى على المستطيل ص المجعول وحدة

اربع

أربع مرات

والعادة أن تقاس السطوح بمربع الوحدة الخطية أى بالمربع الذى ضلعه يساوى وحدة الطول

فاذا جعل المتر وحدة للطول يكون المتر المربع وحدة للسطوح واذا كان الذراع وحدة للطول يكون الذراع المربع وحدة للسطوح وهكذا وحيث ان مربع الواحد واحد ينتج من ذلك أن نسبة أى مستطيل الى مربع الوحدة الخطية كنسبة حاصل ضرب قاعدة المستطيل المذكور فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة المربع فى ارتفاعه وحيث أن قاعدة مربع الوحدة الخطية تساوى الوحدة الخطية وارتفاعه كذلك تكون المناسبة هكذا

$$\frac{\text{المستطيل}}{\text{المربع}} = \frac{\text{حاصل ضرب القاعدة فى الارتفاع}}{1 \times 1}$$

اعنى ان مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه فحينئذ المستطيل الذى قاعدته ق = ٣٫٥٣ م وارتفاعه ع، = ٢٫٢٥ م

مساحته = ٣٫٥٣ م × ٢٫٢٥ م = ٧٫٩٤٢٥ أمتار مربعة أو ٢٥ سنتيمترا مربعا و ٩٤ ديسيمترا مربعا و ٧ أمتار مربعة

(الدعوى الثالثة النظرية شكل ١٠١ ثانى)

مساحة المثلث القائم الزاوية تساوى نصف حاصل ضرب احد الضلعين المحيطين بزاويته القائمة فى الآخر

فالمثلث ا ب ح القائم الزاوية فى ب مساحته تساوى نصف حاصل ضرب ا ب فى ب ح اى $\frac{\text{ا ب} \times \text{ب ح}}{2}$

لانا اذا تممنا المستطيل الذى قاعدته ب ح وارتفاعه ا ب نشاهد أن هذا المستطيل ضعف المثلث ا ب ح وحيث ان مساحة المستطيل تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه ينتج أن مساحة المثلث ا ب ح تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وهو المطلوب اثباته

(الدعوى الرابعة النظرية شكل ١٠٢ ثانى)

مساحة أى مثلث تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

فمساحة المثلث ا ب ح مثلا تساوى نصف حاصل ضرب قاعدته ب ح فى ارتفاعه ا د أى تساوى (ب ح × ا د)/٢ لان مساحة المثلث ا ب د القائم الزاوية فى د تساوى (ب د × ا د)/٢ ومساحة المثلث ا د ح القائم الزاوية فى د تساوى (د ح × ا د)/٢ ومساحة المثلث الكلى ا ب ح تساوى مجموع مساحتى المثلثين ا د ب و ا د ح فتكون مساحة المثلث ا ب ح = (ب د × ا د)/٢ + (د ح × ا د)/٢ أو = (ب د × ا د + د ح × ا د)/٢ = ((ب د + د ح) ا د)/٢ أو = (ب ح × ا د)/٢ وهو المطلوب اثباته

(وينتج من هذه النظرية نتائج)

الاولى ان نسبة المثلثات المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى بعضها

الثانية ان نسبة المثلثات المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى مثلثين الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

الرابعة ان المثلثات ذات القاعدة المشتركة التى رؤسها على مستقيم مواز للقاعدة المذكورة متكافئة ولايضاح ذلك يرمز بالحرف م لمثلث قاعدته ن وارتفاعه ع وبالحرف مَ لمثلث آخر قاعدته نَ وارتفاعه عَ فيكون م = (ن × ع)/٢ ومَ = (نَ × عَ)/٢ وبقسمة أحدهما على الآخر يحدث

م/مَ = (ن × ع)/٢ : (نَ × عَ)/٢ أو = ن × ع : نَ × عَ فاذا كانت ن = نَ يكون م : مَ :: ع : عَ

واذا كانت $\text{ع} = \text{عَ}$ يكون $\text{م} : \text{مَ} :: \text{ن} : \text{نَ}$

(تنبيه) اذا وقع ارتفاع المثلث خارجا عنه كما فى الشكل تجرى فيه النظرية المتقدمة بطرح مساحة المثلث ا د ب من مساحة المثلث ا د ح هكذا

$$\text{ا د ح} = \frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢} \quad \text{و}$$

$$\text{ا د ب} = \frac{\text{د ب} \times \text{ا د}}{٢} \quad \text{فيكون}$$

$$\text{ا د ح} - \text{ا د ب} = \frac{\text{د ح} \times \text{ا د}}{٢} - \frac{\text{د ب} \times \text{ا د}}{٢}$$

$$\text{أو ا ب ح} = \frac{\text{ا د}(\text{د ح} - \text{د ب})}{٢} = \frac{\text{ب ح} \times \text{ا د}}{٢}$$

(الدعوى الخامسة النظرية شكل ٩٧)

مساحة أي شكل متوازى الاضلاع تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه

فالشكل ا ب ح د المتوازى الاضلاع مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته ا ب فى ارتفاعه د ه أى $\text{ا ب ح د} = \text{ا ب} \times \text{د ه}$

(برهانها) أن يوصل القطر د ب فينقسم المتوازى الاضلاع الى مثلثين متساويين كما تقدم اثباته فى المقالة الاولى فساحة المثلث ا ب د $= \frac{\text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢}$ ومساحة المثلث د ب ح $= \frac{\text{ح د} \times \text{ب و}}{٢}$ و $\text{ح د} = \text{ا ب}$ و $\text{ب و} = \text{د ه}$ فتكون مساحة المثلث د ب ح $= \frac{\text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢}$

ومساحة متوازى الاضلاع ا ب ح د تساوى مساحة المثلث ا ب د زائدة مساحة المثلث ح ب د فتكون مساحة متوازى الاضلاع

$$\text{ا ب ح د} = \frac{\text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢} + \frac{\text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢} = \frac{\text{ا ب} \times \text{د ه} + \text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢}$$

$$\text{أو ا ب ح د} = \frac{(\text{ا ب} + \text{ا ب})\,\text{د ه}}{٢} = \frac{٢\,\text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢}$$

أو $\text{ا ب ح د} = \frac{٢ \times \text{ا ب} \times \text{د ه}}{٢} = \text{ا ب} \times \text{د ه}$ وبهذا يثبت المطلوب

(وينتج من هذه النظرية نتائج)

الاولى ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة القاعدة الى بعضها كنسبة ارتفاعاتها الى بعضها

الثانية ان نسبة الاشكال المتوازية الاضلاع المتحدة الارتفاع الى بعضها كنسبة قواعدها الى بعضها

الثالثة ان نسبة أى شكلين متوازيى الاضلاع الى بعضهما كنسبة حاصل ضرب قاعدة الاول فى ارتفاعه الى حاصل ضرب قاعدة الثانى فى ارتفاعه

الرابعة ، انه اذا اتحدت القاعدة والارتفاع فى مستطيل ومتوازى الاضلاع كان المستطيل مكافئا المتوازى الاضلاع

(الدعوى السادسة النظرية شكل ٩٥)

مساحة شبه المنحرف تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين

فشكل ا ب جـ د الشبيه بالمنحرف مساحته تساوى نصف حاصل ضرب ارتفاعه جـ هـ فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين ا ب و جـ د أى تكون مساحته $= \frac{جـه (اب + جـد)}{2}$

(برهانها) أن يوصل القطر ا جـ فينقسم الشكل الى مثلثين ا ب جـ و ا جـ د ومساحة المثلث ا ب جـ $= \frac{جـه \times اب}{2}$ ومساحة المثلث ا جـ د $= \frac{او \times جـد}{2}$ ومساحة شبيه المنحرف ا ب جـ د تساوى مساحة المثلث ا ب جـ زائدة مساحة المثلث ا جـ د فتكون مساحة ا ب جـ د $= \frac{جـه \times اب}{2} + \frac{او \times جـد}{2}$ أو $= \frac{جـه \times اب + او \times جـد}{2}$ وحيث ان او $=$ جـ هـ تكون مساحة ا ب جـ د $= \frac{جـه (اب + جـد)}{2}$ وهو المطلوب اثباته

(تنبيه ١)

حيث تبين أن مساحة شبيه المنحرف ا ب جـ د $= \frac{جـه (اب + جـد)}{2}$

أو $=$ جـ هـ $\times \frac{(اب + جـد)}{2}$

او $= \frac{جـه}{2} \times (اب + جـد)$ يعلم من ذلك أن مساحة شبيه المنحرف

تساوى

تساوى حاصل ضرب ارتفاعه فى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين أو تساوى حاصل ضرب نصف ارتفاعه فى مجموع قاعدتيه المتوازيتين

(تنبيه ٢)

يمكن أخذ مساحة شبيه المنحرف بضرب ارتفاعه فى قاعدته المتوسطة بين قاعدتيه المتوازيتين لان هذه القاعدة المتوسطة تساوى نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين كما صرح به فى المقالة الاولى

(الدعوى السابعة النظرية شكل ١٠٦)

اذا قسم مستقيم مثل اح الى قسمين مختلفين مثل اب و بح فالمربع المنشا على المستقيم الكامل اح يحتوى على المربع المنشا على الجزء اب وعلى المربع المنشا على الجزء الآخر بح وعلى ضعف المستطيل المكون من الجزءين اب و بح أعنى أن $\overline{\text{اح}}^{2}$ أو $(\text{اب} + \text{بح})^{2} = \overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + ٢\ \text{اب} \times \text{بح}$

(برهانها) أن يرسم المربع احدهـ ويؤخذ او = اب ويمد وع موازيا للمستقيم اح ثم بط موازيا للمستقيم اهـ فينقسم المربع احدهـ الى أربعة أجزاء (الاول) ابسو وهو المربع المنشأ على اب لاننا أخذنا او = اب (والثانى) سعدط وهو المربع المنشأ على بح لان اح = اهـ و اب = او فيكون اح — اب = اهـ — او أى ان بح = هـو وبسبب التوازى يكون سع = بح و دع = هـو فيكون طسعد مساويا للمربع المنشا على بح فاذا طرحنا هذين المربعين من المربع الكلى يبقى المستطيلان بحعس و هـوسط ومساحة كل واحد منهما تساوى اب × بح وبهذا يثبت المطلوب

(تنبيه)

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$(د + ح)^٢ = د^٢ + ح^٢ + ٢ د ح$

(الدعوى الثامنة النظرية شكل ١٠٧)

أى مستقيم مثل اح كان فاضل مستقيمين مثل اب و بح يكون المربع المنشأ عليه مساويا للمربع المنشا على أحدهما اب زائدا المربع المنشأ على الآخر بح ناقصا ضعف مستطيل الخطين اب و بح أعنى أن

$\overline{اح}^٢$ أو $(اب - بح)^٢ = \overline{اب}^٢ + \overline{بح}^٢ - ٢ اب \times بح$

(برهانها) أن يرسم المربع ابىف ثم يؤخذ اه = اح ويمد حع موازيا للمستقيم بى و حك موازيا اب ويكمل المربع هفلك فساحة كل من المستطيلين حبىع و علكد تساوى اب × بح فاذا طرحناهما من الشكل الكلى

ابىلكها الذى مقداره يساوى $\overline{اب}^٢ + \overline{بح}^٢$ يبقى المربع احده وبهذا يثبت المطلوب

(تنبيه)

هذه القضية تبين بالقانون الجبرى هكذا

$(ح - ب)^٢ = ح^٢ + ب^٢ - ٢ حب$

(الدعوى التاسعة النظرية شكل ١٠٨)

المستطيل المنشأ على مجموع خطين مثل اب و بح وعلى فاضلهما يساوى فاضل مربعى هذين الخطين أعنى ان $(اب + بح) \times (اب - بح)$

$= \overline{اب}^٢ - \overline{بح}^٢$

(برهانها) أن يرسم مربعان ابىف و احده على اب و اح ثم يمد اب بكمية بك = بح ويكمل المستطيل اكله

فالقاعدة

فالقاعدة اك من المستطيل هى حاصل جمع الخطين اب و بح وارتفاعه اه هو فاضل الخطين المذكورين فحينئذ المستطيل اكله = (اب + بح) × (اب − بح) لكن هذا المستطيل مركب من جزئين اب ح ه + بح لك والجزء بح لك يساوى المستطيل ه ء ع ف لان بح = ءه و بك = ه ف فيكون اكله = اب ح ه + ه ء ع ف وحيث ان هذين الجزءين مكونان للمربع ابء ف ناقصا المربع ء ح ب ع الذى هو المربع المنشا على بح يكون

(اب + بح) × (اب − بح) = $\overline{\text{اب}}^{2}$ − $\overline{\text{بح}}^{2}$

• (تنبيه) •

هذه القضية تكتب بالقانون الجبرى هكذا

(ح + ب) × (ح − ب) = ح^{2} − ب^{2}

• (الدعوى العاشرة النظرية • شكل ١٠٩) •

المربع المرسوم على وتر الزاوية القائمة من المثلث القائم الزاوية يساوى مجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين فليكن ابح مثلثا قائم الزاوية فى ا فترسم مربعات على الاضلاع الثلاثة ثم ينزل من الزاوية القائمة على الوتر عمود اد ويمد الى ه ويوصل القطران ار و بب فحيث ان الزاوية ابر مركبة من الزاوية ابب ومن الزاوية القائمة بحر وان الزاوية بحب مركبة من الزاوية ابب المذكورة ومن الزاوية القائمة ابب تكون الزاوية ابر = بحب ولكون اب = بب من المربع و بر = بح كذلك يكون المثلث ابر مساويا للمثلث ببح لتساوى الزاوية المحصورة بين الاضلاع المتساوية بالتناظر واعلم ان المثلث ابر نصف المستطيل بدهر المتحد معه فى القاعدة بر

وفي الارتفاع حد وان المثلث ب ب ح نصف المربع اب لان الزاوية ب اح قائمة كالزاوية حاك والمستقيمين اب و اك لا يكونان الا خطا مستقيما موازيا للمستقيم حب فحينئذ يكون الارتفاع اح مشتركا بين المثلث ب ب ح والمربع اب المتحدين في القاعدة حب فيكون المثلث نصف المربع وقد تبين ان المثلث احر مساويا للمثلث ب ب ح فيكون المستطيل حدهر الذي هو ضعف المثلث احر مكافئا للمربع اب الذي هو ضعف المثلث ب ب ح ويعمل هذا يبرهن على ان المستطيل بدهو مكافئ للمربع اح وحيث ان المستطيلين حدهر و بدهو مكونان للمربع بحرو يكون المربع بحرو المنشا على الوتر مساويا لمجموع المربعين ابحط و احبك المنشأين على الضلعين الآخرين أي ان $\overline{بح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{اح}^2$

(نتائج)

الاولى مربع أحد ضلعي الزاوية القائمة يساوي مربع الوتر ناقصا مربع الضلع الآخر ويكتب هكذا $\overline{اب}^2 = \overline{بح}^2 - \overline{اح}^2$

الثانية اذا كان ابحد مربعا قطره اح يكون المثلث ابح قائم الزاوية ومتساوي الساقين فيحدث $\overline{اح}^2 = \overline{اب}^2 + \overline{بح}^2 = 2\,\overline{اب}^2$ أعني ان المربع المنشا على القطر اح ضعف المربع المنشا على الضلع اب

وحيث ان $\overline{اح}^2 : \overline{اب}^2 :: 2 : 1$ يكون $اح : اب :: \sqrt{2} : 1$

أعني انه لا نسبة قياسية بين قطر المربع وضلعه أنظر (شكل ١١٨)

الثالثة حيث تبين ان المربع اب مكافئ للمستطيل حدهر والارتفاع ور مشترك بين المربع حور والمستطيل حدهر تكون نسبة المربع حور للمستطيل حدهر كنسبة القاعدة بح للقاعدة حد أعني يكون $\overline{بح}^2 : \overline{اح}^2 :: بح : حد$ أعني ان نسبة

مربع

مربع الوتر لمربع أحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة كنسبة الوتر للسهم المجاور لهذا الضلع والسهم هنا جزء من الوتر محدود بالعمود النازل من الزاوية القائمة فالجزء ـ ى هو السهم المجاور للضلع ا ـ والجزء ى ح هو السهم المجاور للضلع اح .

ويوجد أيضا كما تقدم $\overline{ـح}^2 : \overline{اح}^2 :: ـح : حى$

الرابعة حيث ان للمستطيلين ـ ى ه و ى ح ر ه ارتفاعا واحدا تكون نسبة أحدهما الى الآخر كالنسبة بين ـ ى و ح ى ومن حيث ان

المستطيلين مكافئان للمربعين $\overline{ا ـ}^2$ و $\overline{اح}^2$ يكون

$\overline{ا ـ}^2 : \overline{اح}^2 :: ـى : ى ح$

يعنى ان نسبة أحد مربعى ضلعى الزاوية القائمة الى الآخر كنسبة سهمى الوتر المجاورين لهما

*(تعريف * شكل ١٠٩ الثانى)*

مسقط مستقيم مثل ا ـ على اخر مثل ح ى هو الجزء آ ـَ المحصور بين موقعى العمودين النازلين من النقطتين ا و ـ على المستقيم ح ى

*(الدعوى الحادية عشر النظرية * شكل ١١٠)*

مربع الضلع المقابل للزاوية الحادة من أى مثلث يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين ناقصا ضعف المستطيل المكون من أحد هذين الضلعين ومن مسقط الآخر على الاول

فاذا كانت الزاوية ح حادة فى المثلث ا ـ ح وأنزلنا عمودا اى على مجاورها ـ ح يكون

$\overline{ا ـ}^2 = \overline{اح}^2 + \overline{ـح}^2 - ٢ ـح \times ح ى$

(برهانها) أن يقال لا يخلو اما أن يقع العمود داخل المثلث أو خارجه فاذا وقع العمود اى داخل المثلث ا ـ ح كان ـ ى = ـ ح ـ ح ى

ومنه ينتج $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 - 2\ \text{بج} \times \text{جد}$

فاذا أضفنا $\overline{\text{اد}}^2$ يكون $\overline{\text{بد}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 + \overline{\text{اد}}^2 - 2\ \text{بج} \times \text{جد}$

وحيث ان المثلثين القائمي الزاوية ا ب د و ا ج د ينتجان $\overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{اب}}^2$ و $\overline{\text{اد}}^2 + \overline{\text{دج}}^2 = \overline{\text{اج}}^2$ يكون

$\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - 2\ \text{بج} \times \text{جد}$

واذا وقع العمود ا د خارج المثلث ا ب ج كان $\text{بد} = \text{جد} - \text{بج}$ وعليه يكون

$\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{جد}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 - 2\ \text{جد} \times \text{بج}$ فاذا أضفنا $\overline{\text{اد}}^2$

واختصرنا نتج $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{اج}}^2 - 2\ \text{بج} \times \text{جد}$

*(الدعوى الثانية عشر النظرية * شكل ١١١)*

مربع وتر الزاوية المنفرجة من أي مثلث منفرج الزاوية يساوي مجموع مربعي الضلعين الآخرين زائدا ضعف المستطيل المكون من أحدهما ومن مسقط الآخر على الاول

فاذا كانت الزاوية ج من المثلث ا ب ج منفرجة وأنزلنا ا د عمودا على مجاورها ب ج يكون $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اج}}^2 + \overline{\text{بج}}^2 + 2\ \text{بج} \times \text{جد}$

(برهانها) أن يقال ان العمود لا يمكن أن يقع داخل المثلث لانه لو وقع في هـ مثلا لكان في المثلث ا ج هـ زاوية قائمة هـ وزاوية منفرجة ج لكن هذا غير ممكن فلا يقع العمود الا خارج المثلث وحينئذ يكون $\text{بد} = \text{بج} + \text{جد}$

ومنه ينتج $\overline{\text{بد}}^2 = \overline{\text{بج}}^2 + \overline{\text{جد}}^2 + 2\ \text{بج} \times \text{جد}$ فاذا أضفنا

$\overline{\text{اد}}^2$

$\overline{\text{اد}}^{2}$ واختصرنا كما فى النظرية السابقة حدث

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اح}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + ٢\ \text{بح} \times \text{حد}.$$

(الدعوى الثالثة عشر النظرية شكل ١١٢)

اذا وصل مستقيم مثل اه من رأس أى مثلث مثل ابح الى وسط قاعدته حدث

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{اه}}^{2} + ٢\ \overline{\text{به}}^{2}$$

(برهانها) أن ننزل العمود اد على القاعدة بح فمن المثلث اهح يحدث

$$\overline{\text{اح}}^{2} = \overline{\text{اه}}^{2} + \overline{\text{هح}}^{2} - ٢\ \text{هح} \times \text{هد}$$

ومن المثلث ابه يحدث

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \overline{\text{اه}}^{2} + \overline{\text{هب}}^{2} + ٢\ \text{هب} \times \text{هد}$$

فاذا جمعنا ولاحظنا ان هب = هح يحدث

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{اه}}^{2} + ٢\ \overline{\text{هب}}^{2}$$

(الدعوى الرابعة عشر النظرية شكل ١١٣ الثانى)

كل شكل رباعى مجموع مربعات أضلاعه الاربعة يساوى مجموع مربعى قطريه زائداً أربعة أمثال مربع الخط الموصول بين وسطيهما

(برهانها) أن يفرض اح و بد قطرى المربع ابحد و ع و و وسطيهما ثم يوصل بو و دو و عو فبمقتضى النظرية المتقدمة يحدث

من المثلث ابح $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{بو}}^{2} + ٢\ \overline{\text{او}}^{2}$

ومن المثلث ادح $\overline{\text{اد}}^{2} + \overline{\text{دح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{دو}}^{2} + ٢\ \overline{\text{او}}^{2}$

وبالجمع يكون $\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{بح}}^{2} + \overline{\text{اد}}^{2} + \overline{\text{دح}}^{2} = ٢\ \overline{\text{بو}}^{2} + ٢\ \overline{\text{او}}^{2} + ٢\ \overline{\text{دو}}^{2} + ٢\ \overline{\text{او}}^{2}$

$$= ٢\ (\overline{\text{بو}}^{٢} + \overline{\text{دو}}^{٢}) + ٤\ \overline{\text{او}}^{٢}$$

ومن المثلث بود $\overline{\text{بو}}^{٢} + \overline{\text{دو}}^{٢} = ٢\ \overline{\text{بع}}^{٢} + ٢\ \overline{\text{وع}}^{٢}$ فيكون

$$\overline{\text{اب}}^{٢} + \overline{\text{بح}}^{٢} + \overline{\text{اد}}^{٢} + \overline{\text{دح}}^{٢} = ٤\ \overline{\text{بع}}^{٢} + ٤\ \overline{\text{وع}}^{٢} + ٤\ \overline{\text{او}}^{٢}$$

وحيث ان $\overline{\text{اح}}^{٢} = ٤\ \overline{\text{او}}^{٢}$ و $\overline{\text{بد}}^{٢} = ٤\ \overline{\text{بع}}^{٢}$ يكون

$$\overline{\text{اب}}^{٢} + \overline{\text{بح}}^{٢} + \overline{\text{اد}}^{٢} + \overline{\text{دح}}^{٢} = \overline{\text{بد}}^{٢} + \overline{\text{اح}}^{٢} + ٤\ \overline{\text{وع}}^{٢}$$

نتيجة اذا كان الشكل الرباعى متوازى الاضلاع انعدم المستقيم ع و وكان مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أى شكل متوازى الاضلاع مساويا لمجموع مربعى قطريه

(فى الخطوط المتناسبة والاشكال المتشابهة)

*(الدعوى الخامسة عشر النظرية *شكل ١١٤)*

المستقيم الموازى لاحد أضلاع مثلث يقسم ضلعيه الآخرين الى أجزاء متناسبة فالمستقيم مثل ده الموازى للقاعدة بح من المثلث ابح يقسم الضلعين اب و اح الى أجزاء متناسبة بحيث يكون

اد : دب :: اه : هح

(برهانها) أن يوصل به و دح فيحدث مثلثان بهد و دهح متكافئان لاتحاد القاعدة ده وتساوى الارتفاعين لان الرأسين ب و ح موضوعتان على مستقيم موازللقاعدة والنسبة بين المثلثين اده و بده المشتركين فى الرأس ه والمتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما اد و دب أعنى

اده : بده :: اد : دب

والنسبة بين المثلثين اده و دهح المشتركين فى الرأس د والمتحدين فى الارتفاع كالنسبة بين قاعدتيهما اه و هح أعنى

اده : دهح :: اه : هح

لكن

لكن المثلث ـ ب د هـ يكافئ د هـ ح فيكون

ا د : ـ ب د :: ا هـ : هـ ح

(نتائج)

الاولى ينتج من المناسبة المتقدمة ان

ا د + ب د : ا د :: ا هـ + هـ ح : ا هـ أى

ا ب : ا د :: ا ح : ا هـ وان

ا ب : ب د :: ا ح : ح هـ

الثانية المستقيمان مثل ا ب و ح ى المقطوعان بمتوازيات ا ح و هـ و و ر ح و ب ى الخ ينقسمان الى أجزاء متناسبة بحيث يكون

هـ ر : ر ح :: ر ب : ح ى

لانا اذا امددنا المستقيمين ا ب و ح ى وكانت ط نقطة تلاقيهما يحدث من المثلث ط هـ و الذى فيه الخط ا ح موازللقاعدة هـ و ان

ط هـ : ا هـ :: ط و : ح و . أو

ط هـ : ط و :: ا هـ : ح و

ومن المثلث ر ح ط ان

ط هـ : هـ ر :: ط و : و ح أو

ط هـ : ط و :: هـ ر : و ح فينتج

ا هـ : ح و :: هـ ر : و ح

وبمثل هذا ينتج أن

هـ ر : و ح :: و ب : ح ى وهكذا

أى ان الخطين ا ب و ح ى منقسمان بالخطوط المستقيمة المتوازية ا ح و هـ و و ر ح الخ الى أجزاء متناسبة

(الدعوى السادسة عشر النظرية شكل ١١٦)

اذا قطع خط مثل د هـ ضلعين مثل ا ب و ا ح من مثلث مثل ا ب ح بحيث يكون ا د : د ب :: ا هـ : هـ ح يكون الخط

ده موازيا للقاعدة ﺑـﺣ وهذه عكس الدعوى السابقة

(برهانها) أن يقال لو لم يكن ده موازيا للقاعدة ﺑـﺣ بان كان دو هو الموازى لها الحدث اد : ﺑـد :: او : وح وقد فرضنا ان اد : ﺑـد :: اه : هح فينتج من مقارنة هذه المتناسبة بالسابقة ان او : وح :: اه : هح وهى محالة

(الدعوى السابعة عشر النظرية شكل ١١٧ و ١١٧ الثانى)*

الخط اد المنصف لزاوية مثل ا من مثلث مثل اﺑـﺣ يقسم القاعدة ﺑـﺣ الى جزءين ﺑـد و دح مناسبين للضلعين اﺑ و اح

والخط ان المنصف للزاوية الخارجة حاه يحدد على القاعدة الممتدة جزءين ﺑـن و حن مناسبين للضلعين المذكورين ﺑ و اح

(برهان القضية الاولى) أن يرسم من النقطه ح خط مثل حه يوازى اد ويمد حتى يقطع الامتداد ﺑـا فيكون فى المثلث ﺑـحه خط اد موازللقاعدة هح ويحدث ﺑـد : دح :: اﺑ : اه لكن المثلث احه متساوى الساقين لانه يلزم من توازى اد و حه أن تكون الزاوية احه = داح والزاوية اهح = ﺑـاد

وحيث ان داح = ﺑـاد بالفرض تكون الزاوية احه = اهح ويكون اه = اح فاذا وضعنا اح عوضا عن اه فى المناسبة المتقدمة يكون ﺑـد : دح :: اﺑ : اح وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يرسم حح يوازى ان فيحدث من المثلث ﺑـان هذه المناسبة ﺑـن : نح :: اﺑ : اح ويمثل ماتقدم يبرهن على ان المثلث اح ح متساوى الساقين أى ان اح = اح فيكون ﺑـن : نح :: اﺑ : اح وهو المطلوب

(تعريف)

المثلثان المتشابهان مثلثان أضلاعهما المتناظرة متناسبة فاذا علم مثلث

امكن

أمكن دائما رسم مثلث مشابه له لانه اذا غيرت أضلاع المثلث المعلوم تغيرا نسبيا تحدث ثلاثة أضلاع أخر يمكن بها تكوين مثلث لان كلا منها أقل من مجموع الضلعين الآخرين

(الدعوى الثامنة عشر النظرية شكل ١١٩)

اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعهما المتناظرة (والاضلاع المتناظرة هي المقابلة للزوايا المتساوية)

فاذا كان في مثلثين مثل ا ب ح , د ه ح زاوية ا = د وزاوية ب = د ح ه وزاوية ا ح ب = ه يكون

ب ح : ح ه :: ا ب : ح د :: ا ح : د ه

(برهانها) أن يقال لو وضع الضلعان ب ح , ح ه على استقامة واحدة ومد الضلعان ب ا , ه د حتى التقيا في نقطة مثل و لكان الشكل الحادث ا ح د و متوازى الاضلاع لانه يلزم من كون الخط ب ح ه مستقيما واحدا والزاوية ب ح ا = ح ه د أن يكون الخط ا ح موازيا للخط د ه أو و ه كما تقرر ذلك في المقالة الاولى وكذا يلزم من كون الزاوية ا ب ح = د ح ه أن يكون الخط ا ب أو ب و موازيا للخط د ح

ويلزم من كون الخط ا ح موازيا للقاعدة و ه في المثلث ب ه و أن يكون ب ح : ح ه :: ب ا : ا و كما تقرر ذلك في النظرية الخامسة عشر فاذا وضع في هذه المتناسبة الخط ح د بدل مساويه ا و تكون نسبة ب ح : ح ه :: ب ا : ح د

ويلزم من كون الخط ح د موازيا للضلع ب و أن يكون ب ح : ح ه :: و د : د ه فاذا وضع ا ح بدل مساويه و د يكون ب ح : ح ه :: ا ح : د ه ويلزم من اتحاد نسبة ب ح : ح ه في هذه المتناسبة والمتناسبة المتقدمة أن يكون ا ح : د ه :: ب ا : ح د أى ان الاضلاع المتناظرة متناسبة فقد ثبت بهذا أن المثلثين اللذين زواياهما

المتناظرة متساوية متشابهان وهو المطلوب
وينتج من هذه النظرية انه يكفى لتشابه المثلثين تساوى زاويتين لان الزاوية
الثالثة تكون حينئذ مساوية لنظيرتها

(الدعوى التاسعة عشر النظرية شكل ١٢٠)

المثلثان اللذان اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما المتناظرة
متساوية

فالمثلثان مثل ا ب ح و ء ﮬ و اذا كان فيهما ب ح : ﮬ و
:: ا ب : ء ﮬ :: ا ح : ء و تكون الزاوية ا = ء
والزاوية ب = ﮬ والزاوية ح = و

(برهانها) ان يقال لو أنشئت زاوية مثل و ﮬ ر مساوية للزاوية ب
وزاوية مثل ﮬ و ر مساوية للزاوية ح لكانت الزاوية ر من المثلث
ﮬ و ر مساوية للزاوية ا وحينئذ تكون كل زاوية من المثلث ا ب ح
مساوية لنظيرتها من المثلث ﮬ و ر ويلزم من هذا أن يكون
ب ح : ﮬ و :: ا ب : ﮬ ر والمفروض ان
ب ح : ﮬ و :: ا ب : ﮬ ء ويلزم من تساوى الحدود الثلاثة
فى هاتين المتناسبتين أن يكون الحد الرابع ﮬ ر = ﮬ ء وكذا يلزم من
تساوى الزوايا المذكورة أن تكون
ب ح : ﮬ و :: ا ح : و ر والمفروض ان
ب ح : ﮬ و :: ا ح : و ء ويلزم أيضا من تساوى الحدود الثلاثة
فى هاتين المتناسبتين أن يكون الحد الرابع و ر = و ء وحيث تساوت
الاضلاع المتناظرة من المثلثين ء ﮬ و , ر ﮬ و تكون زواياهما المتناظرة
كذلك ويلزم من كون زوايا المثلث ﮬ ر و انشئت مساوية لنظائرها من
المثلث ا ب ح أن تكون زوايا المثلث ء ﮬ و مساوية لزوايا المثلث ا ب ح
كل لنظيرتها
فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متناسبة زواياهما

المتناظرة متساوية

(تنبيهات)

الاول الزوايا المتساوية من مثلثين أوتارها متناسبة

الثانى يشاهد من هذه القضية وسابقتها أن تساوى الزوايا ملازم لتناسب الاضلاع وتناسب الاضلاع ملازم لتساوى الزوايا وأحد هذين الشرطين كاف فى تشابه المثلثين وليس كذلك فى الاشكال المغايرة للمثلث لانه لو نظر الى الشكل الرباعى كالمرسوم فى الشكل ١٢١ ورسم الخط هـ و موازيا للضلع ب ح لكانت كل زاوية من الشكل الرباعى ا هـ و ى مساوية لنظيرتها من الشكل الرباعى ا ب ح ى وليست الاضلاع المتناظرة متناسبة كما هو واضح من الشكل وكذا يمكن تقارب النقطتين ب و ى أو تباعدهما بدون تغيير تناسب اضلاع الشكل الرباعى المذكور وهى ا ب و ب ح و ح ى و ى ا وبهذا تتغير مقادير الزوايا فتبين بهذا انه يمكن فى الشكل الرباعى اختلال تناسب الاضلاع بدون تغيير مقادير الزوايا وتغيير الزوايا بدون تبديل الاضلاع أعنى انه لا يلزم من تناسب الاضلاع تساوى الزوايا ولا من تساوى الزوايا تناسب الاضلاع الا فى المثلث فقط

الثالث اهم القضايا فى علم الهندسة قضية شكل العروس مع هاتين القضيتين لان جميع الاشكال المسطحة المستوية يمكن تقسيمها الى مثلثات وكل مثلث يمكن تقسيمه الى مثلثين قائمى الزاوية

(الدعوى العشرون النظرية شكل ١٢٢)

اذا ساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت الاضلاع المحيطة بهاتين الزاويتين متناسبة كان المثلثان متشابهين

أى اذا كانت الزاوية ا من المثلث ا ب ح مساوية للزاوية ى من المثلث ى هـ و وكانت ا ب : ى هـ :: ا ح : ى و يكون المثلث ا ب ح مشابها للمثلث ى هـ و

(برهانها) ان يقال لو أخذ البعد ا ر = ى هـ ورسم من النقطة

و مستقيم مثل و ح موازاللضلع ب ح لكانت كل زاوية من المثلث
ا و ح مساوية لنظيرتها من المثلث ا ب ح كما تقرر ذلك فى المقالة الاولى
ويلزم من هذا أن يكون

ا ب : ا و :: ا ح : ا ح   والمفروض أن
ا ب : د هـ :: ا ح : د و   ويلزم من كون

ا و = د هـ أن يكون الحد الرابع د و = ا ح ويلزم من هذا أن يكون
المثلث ا و ح مساويا للمثلث د هـ و كما تقرر ذلك فى النظرية السادسة
من المقالة الاولى ويلزم من كون المثلث ا و ح مشابها للمثلث ا ب ح
أن يكون مساويه وهو المثلث د هـ و مشابها للمثلث ا ب ح وهو المطلوب

(الدعوى الحادية والعشرون النظرية)

المثلثان اللذان أضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة متشابهان لان المثلثين اللذين بهذه المثابة زواياهما المتناظرة متساوية وقد تقرر فى النظرية الثامنة عشر انه اذا تساوت الزوايا المتناظرة من مثلثين تناسبت أضلاعها المتناظرة فقد ثبت بهذا ان المثلثين اللذين اضلاعهما المتناظرة متوازية أو متعامدة متشابهان وهو المطلوب .

(الدعوى الثانية والعشرون النظرية شكل ١٢٥)

اذا وصل من رأس مثلث الى قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما وازاها الى أجزاء متناسبة أى اذا وصل من رأس مثلث مثل ا ب ح الى قاعدته ب ح خطوط مستقيمة مثل ا و ا ر الخ فهذه الخطوط تقسم القاعدة ب ح وما وازاها مثل د هـ الى أجزاء متناسبة أعنى يكون

د ل : ب و :: ل ك : و ر :: ك ط : ر ح الخ

(برهانها) أن يقال يلزم من كون الخط د ل موازيا للخط ب و أن تكون كل زاوية من المثلث ا د ل مساوية لنظيرتها من المثلث ا ب و ويلزم من هذا أن يكون

د ل

د ل : ب و :: ا ل : ا و

وأيضا يلزم من كون الخط ل ك موازيا للخط ر و أن تكون

ا ل : ا و :: ل ك : و ر

ويلزم من اتحاد نسبة ا ل : ا و في هاتين المتناسبتين أن يكون

د ل : ب و :: ل ك : و ر

وبمثل هذا يبرهن على أن

ل ك : و ر :: ط ك : ر ح وهكذا

فقد ثبت بهذا انه كما تنقسم القاعدة ب ح في النقط و و ز و ح

ينقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط

فينتج من هذا انه اذا انقسمت القاعدة ب ح الى اقسام متساوية في النقط

و و ر و ح ينقسم الخط د ه في النقط ل و ك و ط الى

أقسام متساوية كذلك

(الدعوى الثالثة والعشرون النظرية شكل ١٢٦)

اذا انزل عمود من رأس الزاوية القائمة في المثلث القائم الزاوية على وترها

فاعلم

أولا أن هذا العمود يقسم المثلث الى مثلثين كلاهما يشابه المثلث

الكلي

وثانيا أن كلا من الضلعين المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين وتر القائمة

والقسم المجاور له

وثالثا أن العمود المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمي

الوتر المذكور

أي اذا انزل عمود مثل ا د من رأس الزاوية القائمة ا في المثلث القائم

الزاوية ا ب ح على وترها ب ح فاعلم

أولا أن هذا العمود يقسم المثلث ا ب ح الى مثلثين ا ب د و ا د ح

كلاهما يشابه المثلث الكلي ا ب ح

وثانيا أن كلا من الضلعين ا ب و ا ح المحيطين بالقائمة يصير وسطا متناسبا بين وتر القائمة ب ح والقسم المجاور له ب د أو د ح

وثالثا أن العمود ا د المنزل من القائمة على الوتر يكون وسطا متناسبا بين قسمي الوتر المذكورين وهما ب د و د ح .

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من كون الزاوية ب مشتركة في المثلثين ب ا د و ب ا ح والزاوية ب د ا = ب ا ح لقيامهما أن تكون الزاوية ب ا د = ح وأن يكون المثلث ب ا د مشابها للمثلث ب ا ح

وبمثل هذا يبرهن على أن المثلث ح ا د يشابه المثلث ب ا ح فاذن تكون المثلثات ب ا د و ح ا د و ب ا ح متشابهة وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون المثلث ب ا د مشابها للمثلث ب ا ح أن يكون.

ب د : ب ا :: ب ا : ب ح .... (١)

وكذا يلزم من كون المثلث ح ا د مشابها للمثلث ب ا ح أن يكون

د ح : ا ح :: ا ح : ب ح .... (٢)

فقد ثبت بهذا أن كلا من الضلعين ا ب و ا ح المحيطين بالقائمة وسط متناسب بين وتر القائمة والقسم المجاور له وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثالثة) أن يقال يلزم من كون المثلث ا ب د مشابها للمثلث ا د ح أن تكون

ب د : ا د :: ا د : د ح .... (٣)

يعني أن العمود ا د وسط متناسب بين قسمي الوتر وهما ب د و د ح وهو المطلوب

(تنبيه)

حيث ان مسطح الطرفين في كل متناسبة هندسية يساوي مسطح الوسطين ينتج من المتناسبة (١). أن

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \text{بد} \times \text{بح}$$

ومن المناسبة (٢) أن

$$\overline{\text{اح}}^{2} = \text{دح} \times \text{بح}$$

فلو جمعت هذه الاشياء المتساوية لنتج أن

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = \text{بد} \times \text{بح} + \text{دح} \times \text{بح}$$ أو

$$\overline{\text{اب}}^{2} + \overline{\text{اح}}^{2} = (\text{بد} + \text{دح}) \times \text{بح} = \text{بح} \times \text{بح} = \text{بح بح}$$

فقد ثبت بهذا أن مربع وتر القائمة يساوى مجموع مربعى الضلعين الآخرين وقد أقيم الدليل على صحة هذه الدعوى فيما تقدم بوجه آخر فهذا دليل على أن براهين القضايا الهندسية قطعية اذ النظريات مؤسسة على البديهيات التى لا شك فيها

(نتيجة شكل ١٢٧)

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل وتران مثل ا ب و ا ح من أى نقطة من نقط المحيط مثل ا الى نهايتى قطر مثل ب ح لكان المثلث الحادث ا ب ح قائم الزاوية فى ا وحينئذ يكون العمود ا د المنزل من أى نقطة من المحيط على القطر وسطا متناسبا بين قسمى القطر المذكورين وهما ب د و د ح وكذا يكون الوتر ا ب وسطا متناسبا بين القطر ب ح والقسم المجاور له وهو ب د أعنى يكون

$$\overline{\text{اب}}^{2} = \text{بد} \times \text{بح}$$

وأيضا يكون الوتر ا ح وسطا متناسبا بين القطر ب ح والقسم المجاور له وهو د ح أعنى يكون

$$\overline{\text{اح}}^{2} = \text{دح} \times \text{بح} .$$

ويلزم من هذا أن يكون

$\overline{\text{اب}}^{2} : \overline{\text{اح}}^{2} :: \text{بد} \times \text{بح} : \text{دح} \times \text{بح}$

فاذا قسم حدا النسبة الثانية على المضروب المشترك الذى هو بح آلت هذه المناسبة الى هذه

$\overline{\text{اب}}^{2} : \overline{\text{اح}}^{2} :: \text{بد} : \text{دح}$

ولو قورن المربعان $\overline{\text{اب}}^{2}$ و $\overline{\text{بح}}^{2}$ لحدث

$\overline{\text{اب}}^{2} : \overline{\text{بح}}^{2} :: \text{بد} : \text{بح}$

وكذا لو قورن المربعان $\overline{\text{اح}}^{2}$ و $\overline{\text{بح}}^{2}$ لحدث .

$\overline{\text{اح}}^{2} : \overline{\text{بح}}^{2} :: \text{دح} : \text{بح}$

وقد ذكرنا ذلك فى النتيجة الثالثة والرابعة من شكل العروس فلا حاجة للاطالة فتأمل

(الدعوى الرابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٨)

المثلثان اللذان فى أحدهما زاوية مساوية لنظيرتها من الآخر النسبة بينهما كالنسبة بين مستطيل الضلعين المحيطين بالزاوية الاولى و مستطيل الضلعين المحيطين بنظيرتها أى ان

المثلث ابح : المثلث اده :: اب × اح : اد × اه

(برهانها) أن يقال لو وصل الخط به لحدث مثلث ابه ارتفاعه عين ارتفاع المثلث اده لاشتراكهما فى الرأس ه واتحاد اتجاه القاعدتين اب و اد ويلزم من هذا ان يكون

ابه : اده :: اب : اد

وكذا يلزم من اتحاد الارتفاع فى المثلثين ابح و ابه أن يكون

ابح : ابه :: اح : اه

فلو ضربت حدود هاتين المناسبتين بالترتيب لحدث

ابه

اب × اح : اده × اب :: اب × اح : اد × اه

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك اب يصير

اح : اده :: اب × اح : اد × اه وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية ان المثلثين المذكورين يكونان متكافئين اذا كان المستطيل اب × اح مساويا للمستطيل اد × اه أو اذا كانت اب : اد :: اه : اح وهذا انما يتأتى اذا كان الخط حد موازيا للخط به

(الدعوى الخامسة والعشرون النظرية شكل ١٢٢)

نسبة المثلثين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربع ضلع من أحدهما لمربع نظيره

أى ان المثلث ابح : المثلث دهو :: $\overline{\text{اب}}^2$: $\overline{\text{ده}}^2$

(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ابح مشابها للمثلث دهو أن تكون الزاوية ا = د والزاوية ب = ه والزاوية ح = و ويلزم من كون الزاوية ا = د أن يكون

ابح : دهو :: اب × اح : ده × دو

كما تقرر ذلك فى النظرية المتقدمة وهذه المتناسبة يمكن وضعها بهذه الصورة

$$\frac{\text{ابح}}{\text{دهو}} = \frac{\text{اب}}{\text{ده}} \times \frac{\text{اح}}{\text{دو}}$$

ويلزم من كون المثلث ابح مشابها للمثلث دهو ان يكون

$$\frac{\text{اح}}{\text{دو}} = \frac{\text{اب}}{\text{ده}}$$

فاذن يكون

$$\frac{\text{ابح}}{\text{دهو}} = \frac{\text{اب}}{\text{ده}} \times \frac{\text{اب}}{\text{ده}} = \frac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{ده}}^2}$$ وهو المطلوب

(تعريف شكل ١٢٩ الثانى)

كثيرا الاضلاع المتشابهان شكلان مركبان من مثلثات متشابهة بالتناظر

ومتماثلة الوضع ومتحدة العدد فاذا علم كثير الاضلاع مثل ا ب ح د ه امكن دائما رسم شكل آخر يكون مشابها له لانه لو وصل القطران ا ح و ا د من النقطة ا ومد من نقطة ما مثل ب َ من نقط الضلع ا ب أو من نقط استقامته ب َ ح َ موازيا للضلع ب ح ثم ح َ د َ موازيا للضلع ح د ثم د َ ه َ موازيا للضلع د ه وهكذا ظهر أن الشكلين ا ب ح د ه و ا ب َ ح َ د َ ه َ مركبان من مثلثات متحدة العدد ومتشابهة ومتماثلة الوضع

(الدعوى السادسة والعشرون النظرية شكل ١٢٩)

كثيرا الاضلاع المتشابهان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المتناظرة أن تكون الزاوية ر ح و = ب ح ا

والزاوية و ح ط = ا ح د فاذن تكون الزاوية ر ح ط = ب ح د وهكذا

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من تشابه المثلثات المذكورة أن تكون

ور : ا ب :: ر ح : ب ح :: و ح : ا ح :: ح ط : ح د

:: و ط : ا د :: ط ى : د ه :: و ى : ا ه

وينتج من تساوي هذه النسب أن

ور : ا ب :: ر ح : ب ح :: ح ط : ح د :: ط ى : د ه

:: ى و : ا ه وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن الاضلاع المتناسبة في كثيري الاضلاع المتشابهين هي المحيطة بالزوايا المتساوية ويقال لها اضلاع متناظرة والرؤس المتناظرة هي رؤس الزوايا المتساوية

(الدعوى السابعة والعشرون النظرية شكل ١٢٩)

كثيرا الاضلاع اللذان زواياهما المتناظرة متساوية واضلاعهما المتناظرة متناسبة متشابهان أعنى انهما يتركبان من مثلثات متناظرة متشابهة ومتماثلة الوضع

(برهانها) أن يقال لو وصل من رأسين متناظرتين مثل ا و و أقطار مثل اح و اد و وح و وط لكان المثلث ا ب ح مشابها للمثلث و ر ح لان الزاوية ا ب ح = و ر ح بالفرض وأيضا

اب : ور :: ب ح : ر ح وقد تقرر فى النظرية الحادية والعشرين أن المثلثين اللذين بهذه المثابة متشابهان ويلزم من تشابههما أن تكون الزاوية ب ح ا مساوية للزاوية ر ح و فاذا طرحت الزاوية ب ح ا من الزاوية ب ح د والزاوية ر ح و من الزاوية ر ح ط المساوية للزاوية ب ح د كانت الزاوية اح د مساوية للزاوية و ح ط لكن حيث أن المثلثين ا ب ح و و ر ح متشابهان تكون

اح : وح :: ب ح : ر ح

وقد فرضنا أن

ب ح : ر ح :: ح د : ح ط

فاذن يكون

اح : وح :: ح د : ح ط

وقد اتضح ان الزاوية اح د = وح ط فاذن يكون المثلث اح د مشابها للمثلث و ح ط وبمثل هذا يبرهن على أن المثلث ا د ه مشابه للمثلث و ى ط وكذا البواقى كائنا ما كان عدد الاضلاع فى كثيرى الاضلاع المفروضين

(الدعوى الثامنة والعشرون النظرية شكل ١٢٩)

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين

والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعي ضلعين متناظرين

(برهان القضية الاولى) أن يقال يلزم من تشابه الشكلين أن يكون

اب : ور :: بح : رح :: حد : حط الخ

وقد تقرر في علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمات الى مجموع التاليات كنسبة أحد المقدمات الى تاليه فاذن يكون

اب + بح + حد + الخ : ور + رح + حط + الخ :: اب : ور

وحيث ان اب + بح + حد + الخ يساوي محيط الشكل ابحده و ور + رح + حط + الخ يساوي محيط الشكل ورحطى ينتج أن

محيط الشكل ابحده : محيط الشكل ورحطى :: اب : ور وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال يلزم من كون المثلث ابح مشابها للمثلث ورح أن يكون

ابح : ورح :: اح٢ : وح٢

وكذا يلزم من تشابه المثلثين احد و وحط ان يكون

احد : وحط :: اح٢ : وح٢

ويلزم من اشتراك النسبة الثانية في هاتين المتناسبتين أن يكون

ابح : ورح :: احد : وحط

وبمثل هذا يبرهن على أن

احد : وحط :: اهد : وىط وهكذا على حسب عدد المثلثات فينتج من تساوي هذه النسب أن مجموع المقدمات الى مجموع التاليات كنسبة مقدم الى تاليه أي ان

ابح + احد + اده : ورح + وحط + وطى :: ابح : ورح

وحيث

وحيث ان ا ب ح + ا ح ى + ا ى ه يساوى الشكل ا ب ح ى ه
و ور ح + و ح ط + و ط ب يساوى الشكل ور ح ط ب
ينتج أن

الشكل ا ب ح ى ه : الشكل ور ح ط ب :: ا ب ح : ور ح
وقد تقرر أن

ا ب ح : ور ح :: $\overline{ا ب}^٢$: $\overline{و ر}^٢$

فاذن يكون

الشكل ا ب ح ى ه : الشكل ور ح ط ب :: $\overline{ا ب}^٢$: $\overline{و ر}^٢$
وهو المطلوب .

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية انه اذا انشئت ثلاثة اشكال متشابهة اضلاعها المتناظرة مساوية لاضلاع مثلث قائم الزاوية يكون الشكل المنشأ على الضلع الاكبر مساو يالمجموع الشكلين الآخرين لان هذه الاشكال الثلاثة متناسبة لمربعات اضلاعها المتناظرة وحيث كان مربع الوتر مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين الآخرين ينتج من ذلك ان الشكل المنشا على الضلع الاكبر مساو لمجموع الشكلين الآخرين

(الدعوى التاسعة والعشرون النظرية شكل ١٣٠)

الوتران مثل ا ب و ح ى المتقاطعان فى دائرة جزآ احدهما متناسبان بالعكس جزءى الآخر أعنى أن

ا ه : ى ه :: ح ه : ه ب

(برهانها) أن يقال لو وصل ب ى و ا ح لكان المثلثان الحادثان ا ح ه و ب ه ى متشابهين لان الزاوية ه مشتركة والزاوية ا = ى لوقوعهما فى قطعة واحدة والزاوية ح = ب كذلك ويلزم من تشابه هذين المثلثين أن يكون

اهـ : دهـ :: حهـ : بـهـ وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية أن

اهـ × بـهـ = دهـ × حهـ

والمعنى أن المستطيل المكوّن من جزءى أحد الوترين يكافئ المستطيل المكوّن من جزءى الوتر الآخر

(الدعوى الثلاثون النظرية شكل ١٣١)

اذا أخذت نقطة مثل هـ خارج الدائرة ومدّ منها قاطعان مثل هـ بـ و هـ حـ حتى انتهيا بالقوس المقعر بـ حـ فالقاطعان الكاملان يكونان متناسبين لعكسى جزئيهما الخارجين أعنى يكون

هـبـ : هـحـ :: هـد : هـا

(برهانها) أن يقال لو وصل ا حـ و بـ د لكان المثلثان الحادثان هـاحـ و هـبـد متشابهين لان الزاوية هـ مشتركة والزاوية بـ = حـ لوقوعهما فى قطعة واحدة وينتج من تشابههما أن

هـبـ : هـحـ :: هـد : هـا وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية أن

هـبـ × هـا = هـحـ × هـد

والمعنى ان المستطيل المكوّن من أحد القاطعين وجزئه الخارج عن الدائرة يكافئ المستطيل المكوّن من القاطع الآخر وجزئه كذلك

(الدعوى الحادية والثلاثون النظرية شكل ١٣١ الثانى)

اذا وجدت أربع نقط مثل بـ و حـ و د و هـ على مستقيمين متقاطعين مثل اح و اهـ وكان اح × ابـ = اد × اهـ كانت هذه النقط على محيط دائرة واحدة

(برهانها) أن يقال لو فرض أن المحيط الذى يمرّ بالنقط حـ و بـ و د

يقطع

يقطع الخط ا هـ فى نقطة أخرى غير النقطة هـ كالنقطة م مثلا للزم أن يكون

ا ب × ا ح = ا د × ا م

والمفروض أن

ا ب × ا ح = ا د × ا هـ

فينتج من هاتين المعادلتين أن

ا د × ا م = ا د × ا هـ وهو محال

فاذن تكون النقطة هـ على المحيط المار بالنقط ح و ب و د وهو المطلوب

(الدعوى الثانية والثلاثون النظرية شكل ١٣٢)

اذا أخذت نقطة مثل هـ خارج دائرة ومد منها مستقيم مماس مثل هـ ا وآخر قاطع مثل هـ ح كان المماس وسطا متناسبا بين القاطع وجزئه الخارج أعنى أن

هـ ح : هـ ا :: هـ ا : هـ د

(برهانها) أن يقال لو وصل المستقيمان ا د و ا ح لكان المثلثان الحادثان هـ ا د و هـ ا ح متشابهين لان الزاوية هـ مشتركة والزاوية هـ ا د الواقعة بين المماس هـ ا والوتر ا د مساوية للزاوية ح ويلزم من تشابههما أن يكون

هـ ح : هـ ا :: هـ ا : هـ د وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية أن مربع الخط المماس يكافئ المستطيل المكون من الخط القاطع ومن جزئه الخارج أعنى أن

$\overline{\text{هـ ا}}^{2}$ = هـ ح × هـ د

(الدعوى الثالثة والثلاثون النظرية شكل ١٣٣)

اذا نصفت زاوية مثلث بمستقيم فالمستطيل المكون من ضلعيها

يساوى المستطيل المكون من قسمى الضلع المقابل لها زائدا مربع المستقيم المنصف لها

أى اذا انصفت زاوية مثل ـ ا ح من مثلث مثل ا ـ ح بمستقيم مثل ا د كان

$$ـ ا \times ا ح = ـ د \times د ح + \overline{ا د}^{٢}$$

(برهانها) أن يقال لو رسم محيط دائرة مار برؤس زوايا المثلث ا ـ ح ومد الخط ا د جهة د حتى انتهى الى محيط الدائرة فى نقطة مثل هـ ووصل هـ ح لكان المثلث الحادث هـ ا ح مشابها للمثلث ـ ا د لانه يلزم من كون الزاوية ـ ا د مساوية للزاوية هـ ا ح بالفرض والزاوية ـ مساوية للزاوية هـ لوقوعهما فى قطعة واحدة أن يكون المثلثان المذكوران متشابهين ويلزم من تشابههما أن تكون اضلاعهما المتناظرة متناسبة أى يكون

$$ا ب : ا هـ :: ا د : ا ح$$

فينتج من هذه المناسبة أن

$$ا ـ \times ا ح = ا هـ \times ا د$$

لكن ا هـ = ا د + د هـ فاذا ضرب كل من حدود هذه المعادلة فى ا د يكون

$$ا هـ \times ا د = \overline{ا د}^{٢} + ا د \times د هـ$$

ويلزم من كون

$$ا د \times د هـ = ـ د \times د ح$$

أن يكون

$$ا ـ \times ا ح = ـ د \times د ح + \overline{ا د}^{٢}$$ وهو المطلوب

* (الدعوى الرابعة والثلاثون النظرية شكل ١٣٤) *

المستطيل المكون من ضلعى مثلث يكافئ المستطيل المكون من الارتفاع المنزل على ضلعه الثالث ومن قطر الدائرة المرسومة على المثلث المذكور

اى

أى ان المستطيل المكوّن من ضلعين مثل ا ب و ا ح من مثلث مثل ا ب ح يكافئ المستطيل المكوّن من الارتفاع ا ى المنزل على ضلعه الثالث ح ب ومن قطر الدائرة ح هـ المرسومة على المثلث المذكور أعنى ان

ا ب × ا ح = ا ى × ح هـ

(برهانها) أن يقال لو وصل ا هـ لكان المثلث ا ب ى القائم الزاوية فى ى مشابها للمثلث ا هـ ح القائم الزاوية فى ا لان الزاوية هـ = ب ويلزم من تشابههما أن يكون

ا ب : ح هـ :: ا ى : ا ح

ومن هذه المتناسبة ينتج أن

ا ب × ا ح = ا ى × ح هـ . . . (١)

وهو المطلوب

(نتيجة)

اذا ضرب كل من طرفى المعادلة (١) فى ب ح أى الضلع الثالث من المثلث حدث

ا ب × ا ح × ب ح = ا ى × ح هـ × ب ح

وحيث ان مساحة المستطيل المكوّن من ا ى و ب ح تساوى ضعف مساحة المثلث ا ب ح يعلم من ذلك انه اذا ضربت اضلاع مثلث فى بعضها كان حاصل الضرب مساويا لضعف مساحة المثلث مضروبة فى قطر دائرة المحيط المارّ برؤسه

واعلم أن حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة يسمى فى بعض الاحيان مساحة جسمية وسيأتى بيانه فى المقالة السادسة

(تنبيه)

اعلم انه يمكن أن يبرهن أيضا على أن مساحة المثلث تساوى محيطه أى مجموع اضلاعه مضروبا فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله انظر (شكل ٨٧ من

اللوحة ٤)

لان كلا من ارتفاعات المثلثات ا ع ب و ب ع ح و ا ع ح المشتركة في الرأس ع يساوي نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المثلث ا ب ح فحينئذ يكون مجموع هذه المثلثات مساويا لمجموع القواعد ء ب و ب ح و ا ح مضروبا في نصف نصف القطر ح ء أي في ربع القطر فقد ثبت بهذا أن مساحة المثلث ا ب ح تساوي محيطه مضروبا في ربع قطر الدائرة المرسومة داخله وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥)

المستطيل المكون من قطري شكل رباعي مرسوم داخل دائرة يساوي مجموع مستطيلي اضلاعه المتقابلة أعني أن

ا ح × ب ء = ا ب × ح ء + ا ء × ب ح

(برهانها) أن يؤخذ القوس ح هـ = للقوس ا ء ويوصل ب هـ الذي يقطع القطر ا ح في و فيكون المثلث الحادث ب ح و مشابها للمثلث ا ب ء لانه يلزم من كون القوس ح هـ مساويا للقوس ا ء أن تكون الزاوية ح ب هـ أو ح ب و مساوية للزاوية ا ب ء وأيضا الزاوية ا ء ب = ا ح ب أو و ح ب لوقوعهما في قطعة واحدة فاذن يكون المثلث ب ح و مشابها للمثلث ا ب ء ويلزم من كونهما متشابهين أن يكون

ا ء : ح و :: ب ء : ب ح

ومن هذه المتناسبة ينتج أن

ا ء × ب ح = ح و × ب ء ... (١)

ولنبرهن الآن على أن المثلث ا ب و مشابه للمثلث ب ء ح فنقول حيث كان القوس ا ء مساويا للقوس ح هـ يكون

ا ء + ء هـ = ح هـ + ء هـ أي ا هـ = ح ء

فاذن تكون الزاوية ا ب هـ أو ا ب و مساوية للزاوية ء ب ح

وايضا

وأيضا الزاوية ب ا و = ب د ح لوقوعهما فى قطعة واحدة فحينئذ يكون المثلث ا ب و مشابه للمثلث ب د ح وينتج من تشابههما أن

ا ب : ب د :: ا و : ح د

وينتج من هذه المناسبة أن

ا ب × ح د = ا و × ب د ..... (٢)

فاذا جمعت هذه المعادلة (٢) الى المعادلة (١) حدث

ا د × ب ح + ا ب × ح د = ا و × ب د + ح و × ب د

= (ا و + ح و) × ب د = ا ح × ب د وهو المطلوب

(الدعوى السادسة والثلاثون النظرية شكل ١٣٥)

نسبة احد قطرى الشكل الرباعى المرسوم داخل دائرة الى قطره الآخر كنسبة مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتى القطر الاول الى مجموع المستطيلين المكونين من الاضلاع المتصلة المارة بنهايتى القطر الآخر أعنى أن

ا ح : ب د :: ا ب × ا د + ب ح × د ح : ا ب × ب ح + ا د × د ح

(برهانها) أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المرسومة على الشكل ثم يقال حيث ان الشكل الرباعى ا ب ح د منقسم بالقطر ا ح الى المثلثين ا ب ح و ا د ح يكون

ا ب × ب ح × ا ح = ٤ نق × ا ب ح (كما تقرر فى نتيجة النظرية ٣٤)

وأيضا يكون

ا د × د ح × ا ح = ٤ نق × ا د ح وبالجمع يكون

ا ح × (ا ب × ب ح + ا د × د ح) = ٤ نق × ا ب ح د

وحيث ان الشكل الرباعى منقسم بالقطر ب د الى المثلثين ا ب د و ح ب د يكون

ب د × (ا ب × ا د + ب ح × د ح) = ٤ نق × ا ب ح د

فحينئذ يكون

اج × (اب × بج + اد × دج) = بد × (اب × اد + بج × دج) ويلزم من هذا أن يكون

اج : بد :: اب × اد + بج × دج : اب × بج + اد × دج وهو المطلوب

(الدعوى السابعة والثلاثون النظرية شكل ٣ من اللوحة ١٧)

اذا ساوت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر وكانت احدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الاول متممة لنظيرتها من المثلث الآخر كانت النسبة بين الضلعين المقابلين للزاويتين المتساويتين كالنسبة بين الضلعين المقابلين للزاويتين المتممتين لبعضهما

أي اذا ساوت زاوية مثل باج من مثلث مثل ابج نظيرتها مثل داه من مثلث مثل اده وكانت احدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الاول مثل الزاوية اجب متممة لنظيرتها مثل الزاوية اده يكون

بج : ده :: اب : اه

(برهانها) أن يقال لو وضع المثلثان كما هو مبين في (الشكل ٣ من اللوحة ١٧) ومد الضلع بج على استقامته جهة ج حتى قطع الضلع اه في و لحدث

اب : او :: بج : جو

لان الخط اج منصف للزاوية باو وقد تقرر في النظرية السابعة عشر ان الخط المنصف لزاوية من مثلث يقسم الضلع المقابل لها الى قسمين مناسبين للضلعين المحيطين بها وحيث كانت الزاوية اجب متممة للزاوية اده وللزاوية اجو تكون الزاوية اجو مساوية للزاوية اده ويلزم من هذا أن يكون الخط جو موازيا للخط ده كما تقرر ذلك في المقالة الاولى

ويلزم

ويلزم من توازيهما أن تكون الزاوية ا و ح مساوية للزاوية ا ه د فاذن يكون

ا و : ا ه :: ح و : د ه

فاذا ضرب كل حد من هذه المناسبة فى نظيره من المناسبة السابقة يحدث

اب × او : او × اه :: بح × حه : حو × دح

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك ا و وحدى النسبة الثانية على المضروب المشترك ح و يكون

اب : اه :: بح : ده أو

بح : ده :: اب : اه وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والثلاثون النظرية شكل ٤ من اللوحة ١٧)

اذا اتممت زاوية من مثلث نظيرتها من مثلث آخر كانت النسبة بين هذين المثلثين كالنسبة بين المستطيلين المكونين من الاضلاع المحيطة بالزاويتين المذكورتين فاذا كانت الزاوية ه ا د متممة للزاوية ب ا ح يكون

ابح : اده :: اب × اح : اد × اه

(برهانها) أن يوضع المثلثان كما هو مبين فى (الشكل ٤ من اللوحة ١٧) ثم يوصل ب د فيحدث

ابح : ابد :: اح : اد و

ابد : اده :: اب : اه

فاذا ضربت الحدود المتناظرة فى بعضها حدث

ابح × ابد : ابد × اده :: اح × اب : اد × اه

وبقسمة حدى النسبة الاولى على المضروب المشترك ابد يكون

ابح : اده :: اح × اب : اد × اه

وهو المطلوب

(الدعوى التاسعة والثلاثون النظرية شكل ٥ من اللوحة ١٧)

قطرا الشكل الرباعى المرسوم على الدائرة يتقاطعان فى نقطة تقاطع المستقيمين

الموصولين بين نقط تماس اضلاعه المتقابلة

(برهانها) أن يوصل القطر هـ ر والمستقيمان ا ح و ب د ثم يبحث عن النسبة الكائنة بين البعدين هـ ط و ر ط اللذين هما بعدا نقطة تقاطع المستقيمين هـ ر و ب د عن النقطتين هـ و ر ثم يبحث أيضا عن النسبة الكائنة بين البعدين هـ طَ و ر طَ اللذين هما بعدا نقطة تقاطع المستقيمين هـ ر و ا ح عن النقطتين المذكورتين هـ و ر بان يقال حيث ان فى المثلثين ب ط هـ و د ط ر زاوية ب ط هـ = زاوية د ر ط وان الزاوية هـ ب ط متممة للزاوية ط د ر يكون هـ ب : د ر :: هـ ط : ط ر (كما تقرر ذلك فى النظرية السادسة والثلاثين)

ويحدث أيضا من المثلثين ا طَ هـ و ح طَ ر أن

ا هـ : ح ر :: هـ طَ : طَ ر

وحيث تقرر فى المقالة الثانية أن

ا هـ = هـ ب و ح ر = ر د

يعلم من ذلك أن

هـ ط : ط ر :: هـ طَ : طَ ر

وأن النقطة طَ هى النقطة ط بعينها وأن القطر هـ ر يمر بنقطة تقاطع المستقيمين ب د و ا ح

وبمثل هذا يبرهن على أن القطر ع و يمر أيضا بنقطة تقاطع المستقيمين المذكورين ب د و ا ح

فقد ثبت بهذا أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهى هـ ر و ع و و ا ح و ب د تتقاطع فى نقطة واحدة وهو المطلوب

(الدعوى الاربعون النظرية شكل ٦ من اللوحة ١٧)

اذا وقعت نقطة مثل ح على مستقيم معلوم مثل ا ب وكانت ا ح : ح ب

::

:: م : ن وكانت نقطة أخرى مثل د على استقامته وكان أيضا

اد : ـد :: م : ن

كانت النسبة بين أى مستقيمين موصولين من النقطتين ا و ـ الى أى نقطة من نقط المحيط الذى قطره ح د ثابتة ومساوية لنسبة م : ن

(برهانها) أن يقال يلزم من كون

اد : ـد :: اح : ـح :: م : ن

أن يكون

اد + اح : ـد + ـح :: اد ـ اح : ـد ـ ـح

:: م : ن

لانه قد تقرر فى علم الحساب أن نسبة مجموع المقدمين الى مجموع التاليين كنسبة فاضل المقدمين الى فاضل التاليين فاذا رمز بالحرف و لمركز الدائرة حدث

٢ او : ٢ حو :: ٢ حو : ٢ ـو :: م : ن

وبقسمة حدود النسبتين الاولين على ٢ وابدال حو بمساويه كو تؤول هذه المناسبة الى

او : كو :: كو : ـو :: م : ن

فاذن يكون المثلث اكو مشابها للمثلث ـكو ويلزم من تشابههما أن يكون

اك : ـك :: او : كو أو

اك : ـك :: م : ن وهو المطلوب

(نتيجة)

ينتج من هذه النظرية انه لو وصل الخط كح لانقسمت الزاوية اكـ الى قسمين متساويين ولو وصل الخط كد لانقسمت الزاوية ـكهـ الى قسمين متساويين كذلك

(تنبيهات)

(التنبيه الاول فى تعاريف لازمة)

اذا قسم مستقيم مثل اب الى جزءين مثل اح و حب كما فى الشكل ٧ من اللوحة ١٧ باى كيفية كانت سمى هذان الجزآن بقسمى المستقيم اب وأيضا اذا أخذت نقطة مثل د على استقامة اب فالجزآن اد و بد يسميان أيضا بقسمى المستقيم اب وقسما الحالة الاولى أى التى فيها نقطة التقسيم موضوعة بين النقطتين ا و ب يميزان بالقسمين الجمعيين وقسما الحالة الثانية أى التى فيها النقطة المذكورة على استقامة اب لا بين طرفيه يميزان بالقسمين الطرحيين فلو قسم المستقيم اب فى نقطة ح بحيث يكون اح : بح :: م : ن وتحصل أيضا من تعيين النقطة د عليه متناسبة بهذه الصورة اد : بد :: م : ن كان المستقيم اب متوافق التقسيم فى النقطتين ح و د وكانت النقطتان ح و د متوافقتى الاقتران بالنسبة للمستقيم اب

ولاشتراك هذه النسبة م : ن فى المتناسبتين السابقتين يكون

اد : بد :: اح : بح

وبتغيير محل الوسطين يكون

اد : اح :: بد : بح (١)

ويعلم من هذه المتناسبة أن الخط حد متوافق التقسيم أيضا فى النقطتين ب و ا وأن النقطتين ب و ا متوافقتا الاقتران فى الخط حد واذا سووى حاصل ضرب طرفى المتناسبة (١) بحاصل ضرب وسطيها حدث

اد × بح = اح × بد

ويعلم من هذه المعادلة انه اذا كان المستقيم متوافق التقسيم كان حاصل ضرب الخط الكلى فى جزئه المتوسط مساويا لحاصل ضرب جزئيه المتطرفين

واذا نظر للخط حد الذى هو قطر الدائرة المرسومة فى الشكل ٩ من

اللوحة

اللوحة ١٧ يرى انه متوافق التقسيم فى النقطتين ب و ا وأن النقطتين ح و ى أيضا متوافقتا الاقتران فى الخط ا ب

وبالجملة فالمستقيم المنصف لزاوية مثلث والمستقيم المنصف لمجاورتها يجعلان الضلع المقابل لها متوافق التقسيم

(التنبيه الثانى)

اذا اعطيت نقطة مثل ا على قطر دائرة مثل القطر ح ى (كما فى الشكل ٦ من اللوحة ١٧) وكان المطلوب ايجاد النقطة المتوافقة الاقتران بها فى الخط ح ى فطريقة ذلك أن يوصل مستقيمان من نقطة من المحيط مثل ك الى النقطتين ا و ح ثم تنشأ زاوية ح ك ب = ا ك ح فتكون النقطة ب متوافقة الاقتران بالنقطة ا وبمثل هذه العملية تتعين النقطة ا اذا كانت النقطة ب معلومة .

(التنبيه الثالث)

يمكن أيضا ايجاد النقطة ب بان يمد من النقطة ا المماس ا ب ثم ينزل من النقطة ب عمود على القطر ح ى فيقطعه فى النقطة المطلوبة لانه لو وصل ب ح لكانت الزاوية ا ب ح = للزاوية ب ب ح كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية

(الدعوى الحادية والاربعون النظرية شكل ٨ من اللوحة ١٧)
اذا أخذت نقطة مثل ح فى مستوى مثلث مثل ا ب ح وانزل منها اعمدة مثل ح ى و ح هـ و ح و على اضلاعه ب ح و ح ا و ا ب كان مجموع مربعات الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مثل ح هـ و ب ى و ا و مساويا لمجموع مربعات الاجزاء الثلاثة الاخر وهى ا هـ و ح ى و ب و أعنى أن

$$\overline{حهـ}^2 + \overline{بى}^2 + \overline{او}^2 = \overline{اهـ}^2 + \overline{حى}^2 + \overline{بو}^2$$

(برهانها) أن يقال لو وصل ح ا لحدث

$$\overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 = \overline{اح}^2 \quad و$$

$$\overline{حو}^2 + \overline{وا}^2 = \overline{اح}^2$$

فينتج من هاتين المعادلتين أن

$$\overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وا}^2 \quad \dots\dots \quad (١)$$

ولو وصل حب و حج لحدث أيضا

$$\overline{حه}^2 + \overline{هج}^2 = \overline{حد}^2 + \overline{دج}^2 \quad \dots\dots \quad (٢) \quad و$$

$$\overline{حد}^2 + \overline{دب}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وب}^2 \quad \dots\dots \quad (٣)$$

فمن المعادلة (١) ينتج أن

$$\overline{وا}^2 = \overline{حه}^2 + \overline{ها}^2 - \overline{حو}^2$$

ومن المعادلة (٢) ينتج أن

$$\overline{هج}^2 = \overline{حد}^2 + \overline{دج}^2 - \overline{حه}^2$$

ومن المعادلة (٣) ينتج أن

$$\overline{دب}^2 = \overline{حو}^2 + \overline{وب}^2 - \overline{حد}^2$$

فلو جمعت هذه المعادلات الثلاث بالترتيب واختصرت حدود حاصل الجمع لحدث

$$\overline{جه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{او}^2 = \overline{ها}^2 + \overline{دج}^2 + \overline{وب}^2$$ وهو المطلوب.

وبمثل هذا يبرهن على أن هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة ح خارجة عن المثلث (كما هو مبين في الشكل ٨ الثاني من اللوحة ١٧)

(تنبيهان)

الاول اذا قسمت اضلاع مثلث في النقط د و هـ و و وكان

$$\overline{جه}^2 + \overline{بد}^2 + \overline{او}^2 = \overline{اه}^2 + \overline{جد}^2 + \overline{بو}^2$$

فالاعمدة

فالاعمدة المقامة على اضلاع المثلث من النقط د و ه و و تتقاطع في نقطة واحدة

لانه ان قيل قد لا تتقاطع في نقطة واحدة يقال لو انزل من النقطة ح التى هى تقاطع العمودين ح د و ح ه عمود على ا ب لقطعه فى وَ ويلزم من هذا أن يكون

$\overline{\text{حه}}^2$ + $\overline{\text{بد}}^2$ + $\overline{\text{اوَ}}^2$ = $\overline{\text{اه}}^2$ + $\overline{\text{حد}}^2$ + $\overline{\text{بوَ}}^2$

فلو طرحت هذه المعادلة من المعادلة المفروضة لحدث

$\overline{\text{او}}^2$ − $\overline{\text{اوَ}}^2$ = $\overline{\text{بو}}^2$ − $\overline{\text{بوَ}}^2$ أو

$\overline{\text{او}}^2$ + $\overline{\text{بوَ}}^2$ = $\overline{\text{اوَ}}^2$ + $\overline{\text{بو}}^2$

وهذه معادلة محالة لان او أصغر من اوَ و بوَ أصغر من بو

(التنبيه الثانى)

اعلم أن هذه النظرية يمكن تطبيقها على الشكل الرباعى وعلى أى مضلع مستو وأما ما ذكر فى التنبيه الاول فلا يتأتى الا فى المثلث فقط

(الدعوى الثانية والاربعون النظرية شكل ٩ من اللوحة ١٧)

اذا قطع مثلث مثل ا ب ح بقاطع مثل و د ه حدث

او × بد × حه = بو × حد × اه

(برهانها) أن يقال لو مد من النقطة ب مستقيم مثل بح يوازى ا ح لحدث

او : بو :: اه : بح و

بد : حد :: بح : حه

وقد تقرر فى علم الحساب انه اذا ضربت حدود متناسبة هندسية فى نظائرها من متناسبة أخرى كانت الحواصل الناتجة متناسبة فاذن يكون

او × بد : بو × حد :: اه × بح : بح × حه

و بقسمة حدى النسبة الثانية على المضروب المشترك ب ث يكون

ا و × ب ى : ب و × حى :: اهـ : حـهـ

ومن هذه المتناسبة ينتج أن

ا و × ب ى × حـهـ = ب و × حى × اهـ

وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو قطع هـ و امتدادات الاضلاع ا حـ و حـ ب و ا ب وليس هنالك حالة أخرى

(الدعوى الثالثة والاربعون النظرية شكل ١٠ من اللوحة ١٧)

اذا أخذت نقطة مثل ع في مستوى مثلث مثل ا ب حـ ووصل منها رؤسه ا و ب و حـ خطوط مستقيمة ع ا و ع ب و ع حـ ومدت حتى قطعت اضلاع المثلث في نقط مثل ى و هـ و حدث

ا و × ب ى × حـهـ = ب و × حى × اهـ

(برهانها) أن يقال يلزم من كون المثلث ا ب ى مقطوعا بالقاطع حـ ع و أن يكون

ا و × ب حـ × ى ع = ب و × حى × ا ع

ومن كون المثلث ا ى حـ مقطوعا بالقاطع ب ع هـ أن يكون

حـهـ × ا ع × ب ى = اهـ × حـ ب × ى ع

فلو ضربت هاتان المعادلتان واختصرت حدود حاصل الضرب لحدث

ا و × ب ى × حـهـ = ب و × حى × اهـ

وهو المطلوب

(تنبيهان)

الاول يمكن أن يبرهن على صحة هذه النظرية بطرق اخرى لا تنبني على النظرية السابقة

وبيان ذلك أن يقال لو مد من النقطة هـ مستقيم هـ ى يوازي ب حـ

ومستقيم

ومستقيم هـ ک يوازى ا ب لحدث عنهما متناسبات وحيث كان للمثلثين ا ب د و ا د ح ارتفاع مشترك يكون

ب ا ب د : ا د ح :: ب د : د ح

ويلزم من اشتراك الارتفاع فى المثلثين ب ع د و ح ع د أن يكون

ب ع د : ح ع د :: ب د : د ح

فينتج من ذلك أن

ا ع ب : ا ع ح :: ب د : د ح

وبمثل هذا يبرهن على أن

ب ع ح : ا ع ب :: ح هـ : ا هـ و

ا ع ح : ب ع ح :: ا و : ب و

فلو ضربت حدود هذه المتناسبات بالترتيب لحدث

ا ع ب × ب ع ح × ا ع ح : ا ع ح × ا ع ب × ب ع ح

:: ب د × ح هـ × ا و : د ح × ا هـ × ب و

ويلزم من كون ا ع ب × ب ع ح × ا ع ح = ا ع ح × ا ع ب × ب ع ح أن يكون

ب د × ح هـ × ا و = د ح × ا هـ × ب و

وهو المطلوب

(التنبيه الثانى)

اعلم أن هذه النظرية صحيحة ولو كانت النقطة ع خارجة عن المثلث وفى هذه الحالة توجد احدى نقط التقاطع على أحد اضلاع المثلث والنقطتان الاخريان على امتدادى الضلعين الآخرين كما هو مبين فى الشكل ١٠ الثانى و ١٠ الثالث من اللوحة ١٧

(الدعوى الرابعة والاربعون النظرية)

اذا قسمت اضلاع مثلث بثلاث نقط وكان حاصل ضرب الاجزاء الثلاثة غير المتجاورة مساويا لحاصل ضرب الاجزاء الثلاثة الاخرى كانت النقط الثلاث

على مستقيم واحد واذا وصل من تلك النقط الى رؤس المثلث خطوط مستقيمة تقاطعت هذه الخطوط فى نقطة واحدة فالخاصية الاولى تقع عند ما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا زوجيا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا فرديا والخاصية الثانية تقع عند ما يكون عدد النقط المفروضة على اضلاع المثلث عددا فرديا وعدد النقط المفروضة على امتداداتها عددا زوجيا

(وبرهان) هذه النظرية كالمقرر فى النظرية الحادية والاربعين فتأمل

(تنبيهان)

الاول اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات هنا هو كثرة استعمالها فى البرهنة على كثير من النظريات المهمة وحل كثير من العمليات

(التنبيه الثانى)

اعلم أن من النظريات المقررة فى ملحقات المقالة الاولى ما يمكن البرهنة عليه بواسطة ما تقرر فى التنبيه الاول من النظرية الحادية والاربعين وهى نظرية ٣٣ ونظرية ٣٤ ومنها ما يمكن البرهنة عليه بواسطة النظرية الرابعة والاربعين التى نحن بصددها وهى نظرية ٣٢ ونظرية ٣٥ لكن المقصود من وضع النظريات فى الملحقات البرهنة عليها بواسطة نظريات مقررة فى مقالة تلك الملحقات فقط

(الدعوى الخامسة والاربعون النظرية شكل ١١ من اللوحة ١٧)

اذا أخرجت أربعة خطوط مستقيمة مثل اب و اى و اح و اه من نقطة واحدة مثل ا وقطعت مستقيما مثل ب ه فى نقط مثل ب و ى و ح و ه وكان

ب ه : ح ه :: ب ى : ح ى

فهذه الخطوط تقسم أى خط مستقيم قاطعته الى أقسام توافقية سواء كان ذلك الخط موازيا للخط ب ه أو غير موازله مثل بَ هَ بحيث يكون

بَ هَ : حَ هَ :: بَ ىَ : حَ ىَ

(برهانها)

(برهانها) أن يقال اذا كان القاطع الثاني موازيا للقاطع الاول ب هـ كانت النظرية واضحة وأما اذا كان القاطع الثاني كيفما اتفق مثل ب هـَ فيقال لو مدّ من النقطة ب مستقيم مثل س ص يوازي ا ح ومدّ من الجهتين حتى لاقى هـ ا في س و ا د في ص لحدث

س ب : ا ح :: ب هـ : ح هـ و

ب ص : ا ح :: ب د : ح د والمفروض أن

ب هـ : ح هـ :: ب د : ح د

فينتج من هذه المناسبات أن ب س = ب ص

ويلزم من كون الخط ص س موازيا للخط ا حَ أن يكون

ب س : ا حَ :: ب هـَ : حَ هـَ و

ب ص : ا حَ :: ب دَ : حَ دَ

ويلزم من كون ب س = ب ص أن يكون

ب هـَ : حَ هـَ :: ب دَ : حَ دَ

وهو المطلوب

واعلم أن الخطوط المستقيمة الاربعة وهي ا ب و ا ح و ا د و ا هـ تكوّن ما يسمى بالحزمة التوافقية والمستقيمين ا ب و ا ح يسميان خطين اقترانيين بالنسبة للخطين ا د و ا هـ وكذا عكسه

(تنبيهان)

الاول اعلم انه يتكوّن حزمة توافقية من الخطوط المستقيمة الاربعة وهي ا ب و ا ح و ا د و ا هـ اذا كان البعد المحصور بين النقطة ب ونقطة تلاقي المستقيم ا د بالمستقيم المار بالنقطة ب والموازي للمستقيم ا ح مساويا للبعد المحصور بين النقطة ب ونقطة تلاقي الموازي المذكور بالمستقيم ا هـ أي اذا كان ب ص = ب س يتكوّن من الخطوط الاربعة وهي ا ب و ا ح و ا د و ا هـ حزمة توافقية لانه قد تقرر أن

ب د : د ح :: ب ص : ا ح   وأن

ب هـ : ح هـ :: ب س : ا ح

وحيث كان ب ص = ب س ينتج من هاتين المناسبتين أنه

ب د : د ح :: ب هـ : ح هـ

وهذه المناسبة تثبت توافق القسمة وهو المطلوب

(التنبيه الثاني)

قد لا يعتبر الا نقطة مثل ب على أحد هذه الخطوط المستقيمة وحينئذ تسمى النقطة ب والمستقيم ا ح نقطة ومستقيما اقترانيين

(الدعوى السادسة والاربعون النظرية شكل ١٢ من اللوحة ١٧)

اذا أخذت نقطة مثل ع في مستوى زاوية مثل ب ا ح ومد منها قاطعان مثل ع ب ح و ع د هـ المتممان للشكل الرباعي ب ح هـ د كانت نقطة تقاطع قطريه وهي ى على المستقيم التوافقي الاقتراني للنقطة ع بالنسبة للمستقيمين ا ب و ا ح

(برهانها) أن يقال يلزم من كون اضلاع المثلث ا ب ح مقطوعة بالقاطع ع د هـ أن يكون

ع ح × ا هـ × ب د = ع ب × ح هـ × ا د

ولو وصل ا ى الذي يقطع ع ح في و و ع هـ في ص لظهر أن الخطوط المستقيمة الثلاثة وهي ح د و ب هـ و ا و متقاطعة في نقطة واحدة هي ى ويلزم من هذا أن يكون

ح و × ا هـ × ب د = ب و × ح هـ × ا د

فاذا قسمت هذه المعادلة على السابقة كل طرف على نظيره وحذفت المضاريب المشتركة حدث

ع ح / ح و = ع ب / ب و

فاذن يكون ا ى هو المستقيم الاقتراني للنقطة ع بالنسبة للمستقيمين ا ب و ا ح وهو المطلوب

(تنبيهان)

(تنبيهان)

الاول اذا مد من النقطة ع جملة خطوط مستقيمة ووصلت اقطار الاشكال الرباعية المتحصلة كانت نقط تقاطع تلك الاقطار على خط مستقيم واحد هو المستقيم الاقترانى للنقطة ع بالنسبة للخطين ا ب و ا ح

الثانى حين تكون النقطة المعلومة ع خارجة عن الزاوية يكون المستقيم الاقترانى داخلها وحين تكون النقطة ع داخلها يكون المستقيم الاقترانى خارجها

(الدعوى السابعة والاربعون النظرية)

(شكل ١٣ من اللوحة ١٧)

اذا أخذت نقطة مثل ا فى مستوى دائرة ومد منها قواطع مثل ا ب ح ومد من نهايتى كل وتر حاصل من تلك القواطع كالنهايتين ب و ح مستقيمان مماسان لمحيط الدائرة مثل ب ى و ح ى المتقاطعين فى ى فجميع النقط المتحصلة بالكيفية التى تحصلت بها النقطة ى تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال لو وصل القطر ا ع وأنزل من النقطة ى العمود ى هـ على القطر ا ع لكانت النقط الثلاث وهى ب و ح و هـ على محيط الدائرة الذى قطره ى ع فاذن يكون

ا ب × ا ح = ا هـ × ا ع

ولو فرض أنه مد من النقطة ا مستقيم قاطع للمحيط فى نقطتين رمز احداهما بَ ورمز الاخرى حَ لحصل أيضا

ا بَ × ا حَ = ا هَ × ا ع

و (هَ رمز لموقع العمود المنزل على ا ع من نقطة تقاطع مماسين اخرين) وقد تقرر فى النظرية الثلاثين أن

ا ب × ا ح = ا بَ × ا حَ فاذن يكون

اهـ = اهـَ ويعلم من ذلك أن موقع العمود المنزل على ا ح من نقطة تقاطع المماسين الجديدين يقع فى النقطة هـ فحينئذ جميع النقط التى مثل ء تكون على العمود المقام على القطر ا ح من النقطة هـ التى تتعين بهذا الارتباط

اهـ = $\frac{\text{اب} \times \text{اد}}{\text{اح}}$ = $\frac{\overline{\text{اك}}^{2}}{\text{اح}}$

و اك هو المماس الممتد من النقطة ك أى ان بعد النقطة هـ عن النقطة ا يساوى الثالث المتناسب مع الخطين اح و اك

(تنبيهات)

الاول حين تكون النقطة المفروضة ا خارجة عن الدائرة يقطع الخط ء هـ هذه الدائرة وحين تكون النقطة ا داخل الدائرة يكون الخط ء هـ خارجها

الثانى اعلم أن النقطة ك التى هى نقطة تماس الدائرة بالمماس الممتد من النقطة ا تكون على المستقيم ء هـ لان بعد النقطة ا عن موقع العمود المنزل من النقطة ك على اح هو أيضا ثالث متناسب مع المستقيمين اح و اك

الثالث بمقتضى التنبيه الثالث من النظرية الاربعين يكون القطر ص ص متوافق القسمة فى النقطتين ا و هـ

الرابع الوتر ب ح متوافق القسمة أيضا فى النقطتين ا و ب لانه لو وصل ب هـ و ح هـ لحدث

اح : حهـ :: اص : صهـ و

اب : بهـ :: اص : صهـ

فينتج من هاتين المناسبتين أن

اح : حهـ :: اب : بهـ أو

اح : اب :: حهـ : بهـ

فيعلم من ذلك أن اهـ هو الخط المنصف للزاوية بهـ و المقسمة للزاوية

بهـ ح

ـ هـ ح فاذن يكون العمود ء هـ منصفا للزاوية ـ هـ ح ويلزم من هذا أن يكون ـ ح متوافق القسمة فى النقطتين ا و ـ وهو المطلوب

(الدعوى الثامنة والاربعون النظرية)

(شكل ١٤ من اللوحة ١٧)

اذا أخذت نقطة مثل ا فى مستوى دائرة ومد منها قواطع مثل ا ـ ح و ا ـَ حَ ثم وصل ـ حَ و ـَ ح فنقط التقاطع التى مثل ـ أى التى تحصل من أخذ هذه الخطوط متى تكون على مستقيم واحد

(برهانها) أن يقال لو مد من النقط ـ و ح و ـَ و حَ خطوط مستقيمة مماسة للدائرة ووصل ص س للزم أن تكون النقطة ـ على المستقيم س ص كما تقرر ذلك فى النظرية التاسعة والثلاثين

وقد تقرر فى النظرية السابقة انه اذا مدت قواطع أخر كان المستقيم الموصول بين نقط تقاطع المماسات الجديدة هو ص س بعينه وكانت نقطة التقاطع ـَ الحادثة من الخطوط المستقيمة التى مثل ـ حَ و ـَ ح على ص س دائما فاذن تكون النقط التى مثل ـ على خط مستقيم وهو المطلوب

واعلم أن المستقيم الذى يصل بين النقطتين ـ و ـَ يقطع الذى يصل بين النقطتين ح و حَ فى نقطة من المستقيم ص س بعينه ويبرهن على ذلك بما ذكر

(تنبيهات)

الاول حين تكون النقطة المعلومة خارجة عن الدائرة يكون الخط الذى يشتمل على جميع النقط التى مثل ـ قاطعا للدائرة وحين تكون النقطة المعلومة داخل الدائرة يكون المستقيم المذكور خارجها

الثانى اعلم أن الخط المستقيم والنقطة اللذين سميناهما فى النظرية ٤٥ و ٤٦ و ٤٧ و ٤٨ بالخط الاقترانى والنقطة الاقترانية هما المسميان

عنـد بعض المؤلفين بالقطبين العكسيين ولهذين القطبين خواص أخر مهمة
جدا مشروحة فى الدروس الهندسية التى ألفها المهندس بو بلاير

الثـالث اعلم أن السبب الموجب لتقرير هذه النظريات عقب المقالة الثالثة
هو أن كثيرا من المسائل المقررة فى المجسمات يتوقف حلها عليها

(فى الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة)

(الدعوى الاولى العملية)

شكل ١٣٧ الاول والثانى والثالث و ١٣٨ الاول والثانى والثالث

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل المستقيم ا ب الى أقسام متساوية قدر ما يراد فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

ان يرسم من احدى نهايتى الخط مستقيم غير محدود مثل ا ل يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية ما مثل ل ا ب ثم يؤخذ من المستقيم ا ل بعد كيف اتفق مثل ا ح ويكرر على المستقيم ال بقدر عدد الاقسام المطلوبة ثم يوصل مستقيم بين نهاية القسم الاخير والنهاية الاخرى من المستقيم المعلوم ويرسم من النقطة ح مستقيم موازله فيتعين على المستقيم المعلوم قسم مثل ا ع يساوى أحد الاقسام المطلوبة

فاذا كان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى خمسة أقسام متساوية مثلا يكرر البعد ا ح على المستقيم ال خمس مرات أى يؤخذ البعد ى ح = ح ا والبعد هى = ى ح و وه = هى و رو = وه ثم يوصل المستقيم ر ب ويرسم من النقطة ح مستقيم ح ع يوازى ر ب فيكون ا ع = $\frac{\text{اب}}{٥}$

وهذه الطريقة مؤسسة على النظرية الخامسة عشر

(الطريقة الثانية شكل ١٣٧ الثانى)

ان يرسم من النهاية ا مستقيم غير محدود مثل ا ل يصنع مع المستقيم المعلوم ا ب زاوية ما ثم يرسم من النهاية ب مستقيم آخر غير محدود

كذلك مثل ب لَ يوازى المستقيم ال ويضاده فى الاتجاه بحيث يصنعان مع المستقيم ا ب زاويتين متبادلتين داخلتين متساويتين ثم يؤخذ بعد كيف اتفق مثل ا ح ويوضع على ال بالابتداء من النهاية ا وعلى المستقيم

ب ل بالابتداء من ب ويكرر خمس مرات على كليهما

أي يؤخذ ء ح = ح ا و هء = ءح و وه = هء و ب و

= وه ثم يؤخذ هَ وَ = وَ ب و ءهَ = هَ وَ و حءَ = ءهَ

و اَحَ = حَءَ ثم يوصل ا اَ و حَ حَ و ءءَ و هه و وَوَ و ب بَ

فينقسم المستقيم المعلوم ا ب الى خمسة أقسام متساوية أعنى ان أقسام ا ع

و ع ط و ط ى و ى ك و ك ب متساوية وهذه الطريقة

أحسن من الاولى وأكثر منها استعمالا

(الطريقة الثالثة شكل ١٣٧ الثالث)

ان يرسم على المستقيم المعلوم ا ب مثلث متساوى الاضلاع مثل ح ا ب

ويؤخذ على أحد اضلاعه مثل ا ح بعد كيف اتفق مثل ح ء ويمد حا

على استقامته جهة ا (ان احتيج لذلك) ويكرر ح ء خمس مرات أى

يؤخذ البعد ح اَ = ٥ ح ء ثم يرسم على ح اَ مثلث متساوى

الاضلاع ح اَ بَ ويؤخذ البعد عَ اَ = ح ء والبعد طَ عَ = عَ اَ

و ىَ طَ = طَ عَ و كَ ىَ = ىَ طَ ثم يوصل ح عَ و ح طَ

و ح ىَ و ح كَ فينقسم الخط ا ب الى خمسة أقسام متساوية وهى

ا ع و ع ط و ط ى و ى ك و ك ب

لانه قد تقرر فى النظرية الثانية والعشرين انه اذا وصل من رأس مثلث الى

قاعدته خطوط مستقيمة قدر ما يراد فهذه الخطوط تقسم قاعدة المثلث وما

وازاها الى أجزاء متناسبة وانه اذا انقسمت القاعدة الى أجزاء متساوية

ينقسم ما وازاها الى أجزاء متساوية

واذا كان المطلوب تقسيم المستقيم ا ب الى أقسام مناسبة لاطوال

معلومة مثل ن و م و ل فلذلك طريقتان

(الطريقة

(الطريقة الاولى شكل ١٣٨)

أن يرسم من النقطة ا مستقيم غير محدود مثل ا ر يصنع مع المستقيم المعلوم زاوية ما ثم يؤخذ عليه بعد ا ح = ن وبعد ح ى = م وبعد ى هـ = ل ويوصل هـ ب ثم يرسم من النقطة ى مستقيم ى و يوازى هـ ب ويرسم من النقطة ح مستقيم ح ع يوازى هـ ب فينقسم المستقيم ا ب الى الاقسام المطلوبة

لانه يلزم من كون الخطين ا ب و ا هـ مقطوعين بالمتوازيات ح ع و ى و و هـ ب أن يكون

ا ع : ا ح :: ع و : ح ى :: و ب : ى هـ

كما تقرر ذلك فى النظرية الخامسة عشر

وحيث كان ا ح = ن و ح ى = م و ى هـ = ل يكون

ا ع : ن :: ع و : م :: و ب : ل وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٣٨ الثالث)

ان يرسم من النهاية ا مستقيم غير محدود مثل ا ر يصنع مع المستقيم المعلوم ا ب زاوية ما ثم يرسم من النهاية ب مستقيم يوازى ا ر ويضاده ثم يؤخذ البعد ا ح = ن والبعد ح ى = م والبعد ى هـ = ل

ويؤخذ أيضا البعد ب ىَ = ى هـ = ل والبعد ىَ حَ = ى ح = م والبعد حَ اَ = ح ا = ن ثم يوصل ا اَ و ح حَ و ى ىَ و هـ ب فتكون الاقسام المطلوبة هى ا ع و ع و و و ب وهذه الطريقة مختارة عن سابقتها

(تنبيه)

اذا علم مستقيم محدود مثل ا ب وكان المطلوب تقسيمه الى قسمين نسبة أحدهما الى الآخر كنسبة طول معلوم مثل م الى طول آخر معلوم كذلك مثل ن فطريقة ذلك أن يرسم من النقطة ا مستقيم غير محدود م

مثل ا ل كما في الشكل ١٣٨ الثاني ويؤخذ عليه ا ح = م ثم يرسم من النقطة ب مستقيم غير محدود مثل ب ك وعليه يؤخذ ب حَ = ن ثم يوصل ح حَ فينقسم المستقيم ا ب في النقطة ع الى القسمين المطلوبين اعني أن

ا ع : ع ب :: م : ن

لانه يلزم من كون الزاوية ا = ب و ا ح = ب حَ أن تكون الزاوية ا ح ع = ب حَ ع وأن يكون المثلث ا ح ع مشابهاً للمثلث ب حَ ع ويلزم من تشابههما أن يكون

ا ع : ع ب :: ا ح : ب حَ

وحيث كان ا ح = م و ب حَ = ن يكون

ا ع : ع ب :: م : ن وهو المطلوب

* (مثالان) *

* (المثال الاول) *

أن يكون المطلوب تقسيم مستقيم محدود الى ثلاثة أجزاء مناسبة لثلاثة اعداد مفروضة مثل ٢ و ٣ و ٤

فالطريقة أن يقسم المستقيم المعلوم الى أجزاء متساوية عددها ٢ + ٣ + ٤ = ٩ أي يقسم الى أجزاء متساوية عددها يساوي مجموع الاعداد المفروضة ثم يؤخذ القسم الاول مع الثاني لتكوين الجزء الاول من الاجزاء المطلوبة ويؤخذ القسم الثالث والرابع والخامس لتكوين الجزء الثاني وما بقي من الخط يكون هو الجزء الثالث

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب ايجاد حاصل ضرب مستقيم محدود في كسر معين كالكسر $\frac{٧}{٣}$

فالطريقة

فالطريقة أن يقسم المستقيم المعلوم الى ثلاثة أقسام متساوية ويكرر أحد تلك الاقسام سبع مرات فيحصل المطلوب

(الدعوى الثانية العملية)

(شكل ١٣٩ الاول والثاني والثالث)

اذا علمت ثلاثة خطوط مستقيمة مثل ا و ب و ح وكان المطلوب ايجاد مستقيم يكون رابعا متناسبا مع الخطوط المعلومة فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

أن ترسم زاوية مثل هـ د و ثم يؤخذ على د هـ البعد د ر = ا والبعد د ح = ب وعلى د و يؤخذ د ے = ح ثم يرسم من النقطة ح مستقيم مثل ح ط يوازي ر ے فيكون د ط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط ح ط موازيا للخط ر ے أن يكون

د ر : د ح :: د ے : د ط

وحيث كان د ر = ا و د ح = ب و د ے = ح يكون

ا : ب :: ح : د ط والمطلوب أن يكون

ا : ب :: ح : س

فاذن يكون س = د ط وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٣٩ الثاني)

أن ترسم زاوية مثل هـ د و ثم يؤخذ على د هـ البعد د ر = البعد ا وبجانبه ر ح = ب ويؤخذ على د و البعد د ے = ح ثم يوصل ر ے ويرسم من النقطة ح مستقيم ح ط يوازي ر ے فيكون ے ط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط ر ے موازيا للخط ح ط أن يكون

د ر : ر ح :: د ے : ے ط

وحيث كان د ر = ا و ر ح = ب و د ے = ح يكون

ا : ب :: ح : ے ط والمطلوب أن يكون

ا : ب :: ح : س

فاذن يكون س = ى ط وهو المطلوب

(الطريقة الثالثة شكل ١٣٩ الثالث)

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل د هـ ثم يؤخذ عليه البعد د و = ا و د ح = ب ثم يرسم من النقطة و مستقيم غير محدود مثل و ك يصنع مع المستقيم د هـ زاوية ما ثم يؤخذ البعد و ى = ح ثم يوصل ى د ويمد من النقطة ح مستقيم مثل ح ط يوازى و ى فيكون ح ط هو الرابع المتناسب المطلوب

لانه يلزم من كون الخط ح ط موازيا للخط و ى أن يكون

د و : د ح :: و ى : ح ط

وحيث كان د و = ا و د ح = ب و و ى = ح يكون

ا : ب :: ح : ح ط والمطلوب أن يكون

ا : ب :: ح : س

فاذن يكون س = ح ط وهو المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم بحيث تكون مساحته مساوية لمساحة مستطيل معلوم فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ن لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف نَ للخط المعلوم الذى يفرض قاعدة للمستطيل المطلوب وبالحرف س لارتفاعه ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه يكون

م = ن × ع و مَ = نَ × س

وحيث كان المطلوب أن يكون م = م يلزم أن يكون

ن × ع

ن × ع = نَ × س

وقد تقرر في علم الحساب انه اذا كان حاصل ضرب كميتين مساويا لحاصل ضرب كميتين يتركب من الكميات الاربع متناسبة هندسية طرفاها كميتا أحد الحاصلين ووسطاها كميتا الحاصل الآخر فاذن يكون

نَ : ن :: ع : س

فيعلم من هذه المتناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المتناسب الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي نَ و ن و ع فاذا اجريت عملية استخراجه لم يبق الا عملية انشاء المستطيل الذي علم كل من قاعدته وارتفاعه وقد ذكرنا عملية ذلك في الدعوى الثانية عشر العملية من المقالة الثانية

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم تكون مساحته مساوية لمساحة مثلث مفروض فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م للمثلث المفروض وبالحرف ن لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف مَ للمستطيل المطلوب وبالحرف نَ لقاعدته المساوية للخط المعلوم وبالحرف س لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في نصف ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

م = ن × $\frac{1}{2}$ ع و مَ = نَ × س

وحيث كان المطلوب أن يكون م = مَ يلزم أن يكون

ن × $\frac{1}{2}$ ع = نَ × س

وهذه تساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

نَ : ن :: $\frac{1}{2}$ ع : س .

فيعلم من هذه المناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المناسب الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي $\bar{ن}$ و $ن$ و $\frac{1}{٢}$ ع

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على خط معلوم يكافئ شبه منحرف مفروضا فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م لمساحة شبه المنحرف المفروض وبالحرف ص لقاعدته الصغرى وبالحرف ك لقاعدته الكبرى وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف $\bar{م}$ لمساحة المستطيل المطلوب وبالحرف $\bar{ن}$ للخط المعلوم الذي يفرض قاعدة له وبالحرف س لارتفاعه المطلوب ثم يقال حيث ان كل شبه منحرف مساحته تساوي حاصل ضرب نصف مجموع قاعدتيه المتوازيتين في ارتفاعه وكل مستطيل مساحته تساوي حاصل ضرب قاعدته في ارتفاعه يكون

$$م = \frac{1}{٢} (ص + ك) \times ع \quad و$$

$$\bar{م} = \bar{ن} \times س$$

وحيث كان المطلوب أن يكون م = $\bar{م}$ يلزم أن يكون

$$\frac{1}{٢} (ص + ك) \times ع = \bar{ن} \times س$$

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

$$\bar{ن} : \frac{1}{٢} (ص + ك) :: ع : س$$

فيعلم من هذه المناسبة أن ارتفاع المستطيل المطلوب هو الرابع المناسب الهندسي للخطوط الثلاثة المعلومة التي هي

$$\bar{ن} \text{ و } \frac{1}{٢} (ص + ك) \text{ و } ع$$

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث على قاعدة معلومة يكافئ مثلثا مفروضا فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م لمساحة المثلث المعلوم وبالحرف ن

لقاعدته

لقاعدته وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف مَ لمساحة المثلث المطلوب
وبالحرف نَ لقاعدته المعلومة وبالحرف س لارتفاعه المطلوب
ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف
ارتفاعه يكون

م = ن × ½ ع و مَ = نَ × ½ س

وحيث كان المطلوب أن يكون م = مَ يلزم أن يكون

ن × ½ ع = نَ × ½ س

وهذه المتساوية يمكن وضعها بهذه الصورة

نَ : ن :: ½ ع : ½ س أو

نَ : ن :: ع : س .

فيعلم من هذه المناسبة ان ارتفاع المثلث المطلوب هو الرابع المتناسب
الهندسى للخطوط الثلاثة المعلومة التى هى نَ و ن و ع

(الدعوى الثالثة العملية شكل ۱۲۷ الثانى)

اذا علم خطان مستقيمان مثل م و ه وكان المطلوب ايجاد الثالث
المتناسب معهما أى ايجاد خط مستقيم مثل س يكون هو الطرف الثانى
من متناسبة هندسية حدها الاول مبين بالخط م ووسطاها متساويان
وكلاهما مبين بالخط ه فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل ا س ويؤخذ ا ب = م ويرسم
على هذا المستقيم نصف محيط دائرة ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر الخط ه
ويركز فى النقطة ا ويرسم قوس دائرة يقطع نصف المحيط فى نقطة مثل ح
ثم ينزل من النقطة ح العمود ح ى على ا ب فيكون المستقيم

ا ى هو الثالث المتناسب المطلوب
لانه قد تقرر فى نتيجة النظرية الثالثة والعشرين ان الوتر ا ﺣ وسط متناسب بين القطر ا ب والقسم المجاور له وهو ا ى أى ان

ا ب : ا ﺣ :: ا ﺣ : ا ى

وحيث كان ا ب = م و ا ﺣ = ﻥ يكون

م : ﻥ :: ﻥ : ا ى

والمطلوب أن يكون

م : ﻥ :: ﻥ : س فاذن يكون س = اى

وهو المطلوب

●(الطريقة الثانية شكل ١٢٧ الثالث)●

أن يرسم مستقيم غير محدود مثل ا س وتعين عليه نقطة مثل ا ويقام منها العمود ا ب على ا س ويؤخذ ا ب = ﻥ ثم يؤخذ على يسار النقطة ا بعد مثل ا ﺣ = م ويوصل ﺣ ب ثم يقام من النقطة ب العمود ب ى على ب ﺣ فيكون اى هو الخط المطلوب لانه قد تقرر فى النظرية الثالثة والعشرين ان العمود المنزل من رأس الزاوية القائمة على وترها وسط متناسب بين قسمى الوتر المذكور أى ان

ﺣ ا : ا ب :: ا ب : ا ى

وحيث كان ﺣ ا = م و ا ب = ﻥ يكون

م : ﻥ :: ﻥ : ا ى

والمطلوب أن يكون

م : ﻥ :: ﻥ : س فاذن يكون س = ا ى وهو المطلوب

●(الطريقة الثالثة)●

أن يكرر أحد الخطين المعلومين ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة المعلومة باحدى الطرق المشروحة فى الدعوى الثانية العملية

●(مثالان)●

●(الاول)●

(الاول)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل على قاعدة معلومة يكافئ مربعا معلوما فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ن لقاعدة المستطيل المطلوب وبالحرف س لارتفاعه ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى تربيع أحد اضلاعه يكون

$$م^{٢} = ن \times س \quad أو \quad م \times م = ن \times س$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$ن : م :: م : س$$

ويعلم من هذه المناسبة ان الارتفاع المطلوب هو الثالث المتناسب مع الخطين ن و م

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب تحويل مربع الى مثلث ارتفاعه معين فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ع لارتفاع المثلث المطلوب وبالحرف س لقاعدته المطلوبة ثم يقال حيث ان كل مثلث مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى نصف ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه فى نفسه يكون

$$م^{٢} = \frac{ع}{٢} \times س \quad أو \quad م \times م = \frac{ع}{٢} \times س$$

ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$\frac{ع}{٢} : م :: م : س$$

فيعلم من هذه المناسبة ان قاعدة المثلث المطلوب هى الثالث المتناسب مع نصف ارتفاعه وضلع المربع المعلوم

(الدعوى الرابعة العملية)

(شكل ١٤٠ الاول والثانى والثالث و ١٣٢)

اذا علم مستقيمان مثل ا و ب وكان المطلوب ايجاد مستقيم مثل س يكون وسطا متناسبا بينهما فلذلك طرق

(الطريقة الاولى)

أن يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ عليه البعد ء هـ = ا والبعد هـ و = ب ثم يرسم نصف محيط قطره ء و ويقام من النقطة هـ العمود هـ ر على القطر ء و فيكون العمود هـ ر هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر فى النظرية الثالثة والعشرين ان

ء هـ : هـ ر :: هـ ر : هـ و

وحيث كان ء هـ = ا و هـ و = ب يكون

ا : هـ ر :: هـ ر : ب

والمطلوب أن يكون

ا : س :: س : ب

فاذن يكون س = هـ ر وهو المطلوب

(الطريقة الثانية شكل ١٤٠ الثانى)

ان يرسم مستقيم غير محدود ويؤخذ منه البعد ا ب = أكبر المستقيمين المعلومين ثم يؤخذ ا ح = المستقيم الآخر ويرسم نصف محيط قطره ب ثم يعد من النقطة ا مستقيم يمسه فيكون البعد المحصور بين نقطة التماس و النقطة ا هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر فى النظرية الثانية والثلاثين ان

ا ب : ا هـ :: ا هـ : ا ح

وحيث كان ا ب = ب و ا ح = ا يكون

ب : ا هـ :: ا هـ : ا

والمطلوب أن يكون

ب : س :: س : ا

فاذن يكون س = ا هـ وهو المطلوب

الطريقة

(الطريقة الثالثة شكل ١٤٠ الثالث)

أن يرسم مستقيم غير محدود و يؤخذ منه البعد اب بقدر أكبر المستقيمين المعلومين ويرسم نصف محيط دائرة قطره اب ثم يؤخذ بعد اح بقدر أصغر المستقيمين المعلومين ويقام من النقطة ح عمود حه على اب ثم يوصل اه فيكون الوتر اه هو الوسط المتناسب المطلوب لانه قد تقرر فى نتيجة النظرية الثالثة والعشرين ان

اب : اه :: اه : اح

وحيث كان اب = ب و اح = ا يكون

ب : اه :: اه : ا

والمطلوب أن يكون

ب : س :: س : ا

فاذن يكون س = اه وهو المطلوب

*(الطريقة الرابعة شكل ١٣٢)

أن يرسل مستقيم مثل هح يساوى أكبر المستقيمين المعلومين ويؤخذ منه بعد هد يساوى أصغر المستقيمين المذكورين ثم يمر محيط دائرة بالنقطتين د و ح ويرسم من النقطة ه مستقيم مماس ها فيكون ه ا الوسط المتناسب المطلوب

لانه قد تقرر فى النظرية الثانية والثلاثين أن

هح : ها :: ها : هد

وحيث كان هح = ب و هد = ا يكون

ب : ها :: ها : ا والمطلوب ان يكون

ب : س :: س : ا

فاذن يكون س = ها وهو المطلوب

(أمثله)

المثال الاول أن يكون المطلوب تحويل مستطيل الى مربع يكافئه فطريقة

ذلك أن يرمز بالحرف ن لقاعدة المستطيل المعلوم وبالحرف ع لارتفاعه وبالحرف س لضلع المربع المطلوب

ثم يقال حيث ان كل مستطيل مساحته تساوى حاصل ضرب قاعدته فى ارتفاعه وكل مربع مساحته تساوى حاصل ضرب ضلعه فى نفسه يكون

ن × ع = س^٢ أو ن × ع = س × س

ومن هذه المتساوية ينتج أن

ن : س :: س : ع

فيعلم من هذه المتناسبة ان ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين قاعدة المستطيل المعلوم وارتفاعه

المثال الثانى أن يكون المطلوب تحويل مثلث معلوم الى مربع فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين قاعدة المثلث ونصف ارتفاعه

المثال الثالث أن يكون المطلوب تحويل متوازى الاضلاع الى مربع يكافئه فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين قاعدة المتوازى الاضلاع وارتفاعه

المثال الرابع أن يكون المطلوب تحويل شبه منحرف الى مربع يكافئه فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين نصف مجموع قاعدتى شبه المنحرف وارتفاعه

(تنبيه عمومى يتعلق بالخطوط المتناسبة)

قد تقرر فى الدعوى الثانية العملية ان

ا : ب :: ح : س

وفى الدعوى الثالثة العملية أن

م : ت :: ت : سة

وفى الدعوى الرابعة العملية أن

ا : س :: س : ب

فينتج من المتناسبة الاولى أن

$$س = \frac{ب \times ح}{ا} \quad \cdots\cdots \quad (١)$$

ومن المتناسبة الثانية أن

$$س = \frac{ن^٢}{م} \quad \cdots\cdots \quad (٢)$$

ومن الثالثة أن

$$س^٢ = ا \times ب \quad \text{أو} \quad س = \sqrt{ا \times ب} \quad \cdots \quad (٣)$$

فالمتساوية (١) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الاول ا ووسطاها ب و ح

والمتساوية (٢) تدل على الحد الرابع من متناسبة هندسية طرفها الاول م ووسطاها متساويان وكلاهما يساوى ن أو على الثالث المتناسب مع المقدارين م و ن

والمتساوية (٣) تدل على الوسط المتناسب الهندسى بين المقدارين ا و ب

واذا رمز بالحرف م لاحد الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة فى المثلث القائم الزاوية وبالحرف ن لضلعها الآخر وبالحرف س لوترها حدث

$$س^٢ = م^٢ + ن^٢ \quad \text{أو} \quad س = \sqrt{م^٢ + ن^٢}$$

فهذه المعادلة تدل على وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة مبين بالحرف م وضلعه الآخر مبين بالحرف ن

ولو رمز بالحرف م لوتر القائمة وبالحرف ن لاحد الضلعين المحيطين بها وبالحرف س لضلعها الآخر لحدث

$$م^٢ = ن^٢ + س^٢ \quad \text{أو} \quad س^٢ = م^٢ - ن^٢$$

$$\text{او} \quad س = \sqrt{م^٢ - ن^٢}$$

فهذه المتساوية تدل على أحد ضلعى مثلث قائم الزاوية وتره م وضلعه الآخر ن

وقد تقرر فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة أن نسبة قطر المربع لضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد فينبنى على هذا أن المربع الذى قطره يساوى ٢ يكون ضلعه مساويا $\sqrt{٢}$ فحينئذ المعادلة التى بهذه الصورة

س = $\sqrt{٢}$ تدل على ضلع المربع الذى قطره يساوى ٢ ولرسمه توضع المعادلة المذكورة بهذه الصورة س = $\sqrt{٢ \times ١}$ ثم يبحث عن الوسط المتناسب الهندسى بين ٢ و ١ فيكون هو ضلع المربع المطلوب

واذا فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{٥}$ وكان المطلوب بيان ماتدل عليه هذه المعادلة فلتكتب هكذا

$$س = \sqrt{٥} = \sqrt{٤ + ١} = \sqrt{٢^٢ + ١^٢}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى ١ وضلعه الآخر يساوى ٢.

ولو فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{٦}$ وكان المطلوب بيان ماتدل عليه هذه المعادلة فلتوضع هكذا

$$س = \sqrt{٦} = \sqrt{٤ + ٢} = \sqrt{٢^٢ + (\sqrt{٢})^٢}$$

فيكون س هو وتر مثلث قائم الزاوية أحد ضلعيه المحيطين بالقائمة يساوى ٢ وضلعه الآخر يساوى $\sqrt{٢}$.

أو توضع هكذا

$$س = \sqrt{٦} = \sqrt{٣ \times ٢}$$

فيكون س هو الوسط المتناسب الهندسى بين مستقيمين أحدهما يساوى ٣ والآخر يساوى ٢

واذا فرض معادلة بهذه الصورة

س = $\sqrt{٣}$ وكان المطلوب بيان ماتدل عليه هذه المعادلة فلتكتب هكذا

$$س = \sqrt{٣} = \sqrt{٣ \times ١}$$

فيكون س هو الوسط المتناسب الهندسي بين مستقيمين أحدهما يساوي ٣، والآخر يساوي ١

وبالجملة اذا رمز بالحرف م لعدد صحيح مركب من مضروبين أحدهما ن والآخر ص كان $\sqrt{م}$ أو $\sqrt{ن \times ص}$ هو الوسط المتناسب الهندسي بين ن و ص

و $\sqrt{م}$ أو $\sqrt{م \times ١}$ يدل في جميع الحالات على الوسط المتناسب الهندسي بين م والواحد

وقد ذكرنا طرق الرسم كل من الرابع المتناسب والثالث المتناسب والوسط المتناسب وذكرنا أيضا طريقة لرسم المثلث القائم الزاوية الذي علم منه ما يكفي لرسمه

واعلم ان المعادلات التي ذكرناها في هذا التنبيه مفيدة جدا اذ هي الارتباطات الاصلية المستعملة في الهندسة وفي تطبيق الجبر على الهندسة

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٤٢ الثاني)

اذا علمت نقطة مثل ح بين ضلعي زاوية مثل ب ا ص وكان المطلوب أن يمد من هذه النقطة مستقيم مثل ى ح هـ نسبة جزئه ى ح لجزئه الآخر ح هـ كنسبة م : ن

فطريقة ذلك أن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم مثل ح ب يوازي ا ب الذي هو أحد ضلعي الزاوية ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة وهي م و ن و ا ب ثم يؤخذ ب هـ بقدر الرابع المتناسب المذكور ويوصل المستقيم هـ ح ى فيكون هـ ح ى هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون الخط ح ب موازيا للخط ا ى أن يكون

ح ى : ح هـ :: ا ب : ب هـ

وحيث ان ا ب : ب هـ :: م : ن يكون

ح ى : ح هـ :: م : ن

وهو المطلوب

(تنبيه)

حين تكون النقطة المعلومة ح على الخط المنصف للزاوية المعلومة ب ا ص يكون للمسئلة حلان وحين تكون الكمية م مساوية للكمية ن تختصر العملية بأن يؤخذ ب هـ بقدر ا ب ثم يوصل هـ ح ى فيكون ح ى = ح هـ وبهذه الكيفية تحل مسئلة هي أن يكون المعلوم نقطة مثل ا بين ضلعي زاوية مثل ى ح ب كما في الشكل ١٤٢ من اللوحة ٥ ويكون المطلوب أن يمد من هذه النقطة مستقيم جزآه ا ى و ا ب الكائنان بين النقطة المعلومة ا وضلعي الزاوية متساويان .

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ٢٨٨)

اذا علم مستقيمان مثل ا ب و ح ى ممكنا التقاطع لكن نقطة تقاطعهما خارجة عن لوحة الرسم وكان المطلوب أن يمد مستقيم ثالث مثل ح ل أو حَ لَ يمر بنقطة تقاطع الخطين المعلومين ا ب و ح ى وبنقطة مثل ح أو حَ معينة الوضع بين ضلعي زاوية الخطين ا ب و ح ى أو خارجها فلطريقة عمل ذلك حالتان

(الحالة الاولى)

أن يمد من النقطة المعلومة ح مستقيم كيف اتفق مثل هـ ح ف ثم تؤخذ نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازي هـ ف ويقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والآخر ل ك بحيث يكون

ر ل : ل ك :: هـ ح : ح ف

فتتعين

فتتعين النقطة ل ويكون المستقيم ل ح هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح فَ

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ره و لح و كف فى نقطة واحدة كما هو واضح مما تقرر فى النظرية الثانية والعشرين

(الحالة الثانية)

أن يمد من النقطة المعلومة حَ مستقيم كيف اتفق مثل ه حَ فَ ثم تؤخذ نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ر ك يوازى ه حَ فَ ثم يقسم ر ك الى جزئين أحدهما ر ل والآخر ل ك بحيث يكون

ر ل : ل ك :: ه ح : ح فَ

ثم يبحث عن النقطة لَ التى هى النقطة الاقترانية للنقطة ل أى المقارنة لها فى الخط ر كَ فيكون المستقيم لَ حَ هو المستقيم المطلوب لانه يلزم من كون النقطتين ح و حَ متوافقتى الاقتران أن يكون

ه حَ : ف حَ :: ه ح : ح ف

وكذا يلزم من كون النقطتين ل و لَ متوافقتى الاقتران أن يكون

ر لَ : ك لَ :: ر ل : ل ك

وقد سبق بالعمل أن ر ل : ل ك :: ه ح : ح فَ

فاذن يكون ر لَ : ك لَ :: ه حَ : ف حَ او

ر لَ ــ ك لَ : ك لَ :: ه حَ ــ ف حَ : ف حَ أى

ر ك : ك لَ :: ه ف : ف حَ

ويلزم من هذا ان تتقاطع الخطوط الثلاثة رهـ و كـ ف و لَ حَ في نقطة واحدة

(تنبيه)

اعلم انه يمكن تعيين النقطة لَ مباشرة بدون احتياج للنقطة لـ المتوافقة الاقتران مع النقطة لَ

وذلك بأن يمد من النقطة المعلومة حَ مستقيم مثل حَ فَ هـ ثم تؤخذ نقطة مثل ر على المستقيم ا ب ويمد منها مستقيم مثل ركَ يوازى هـ حَ ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة هـ ف و رك و ف حَ ويؤخذ ك لَ بقدر الرابع المتناسب المذكور فتتعين النقطة لَ والمستقيم الذى يمر بها وبالنقطة المعلومة حَ يمر بتقاطع الخطين المعلومين ا ب و حـ ء

لانه يلزم من كون

هـ فَ : رك :: فَ حَ : ك لَ

أن تتقاطع الخطوط الثلاثة ر هـ و ك ف و لَ حَ فى نقطة واحدة

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٤٣ و ١٤٤ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مربع يكافئ شكلا متوازى الاضلاع معلوما أو مثلثا مفروضا فطريقة ذلك أن يقال

أولا ليكن ا ب حـ ء شكلا متوازى الاضلاع و ا ب قاعدته و ء هـ ارتفاعه فيبحث عن الوسط المتناسب بين القاعدة ا ب والارتفاع ء هـ باحدى الطرق المقررة فى الدعوى الرابعة العملية وليكن ط ى هو الوسط

المتناسب

المتناسب المذكور ثم ينشأ على ط ــ مربع يكون هو المربع المطلوب أى المكافئ للشكل المتوازى الاضلاع ا ــ ود لانه يلزم من كون ط ــ وسطا متناسبا بين القاعدة ا ــ والارتفاع ده أن يكون

ا ــ : ط ــ :: ط ــ : ده

فاذن يكون

$\overline{\text{ط ــ}}^{2}$ = ا ــ × ده

وحيث ان ا ــ × ده يساوى مساحة متوازى الاضلاع ا ــ ود يكون المربع المنشأ على ط ــ مكافئا لمتوازى الاضلاع المعلوم وهو المطلوب

وثانيا ليكن ا ــ ح هو المثلث المفروض و ــ ح قاعدته و اد ارتفاعه فيبحث عن الوسط المتناسب بين القاعدة ــ ح ونصف الارتفاع اد وليكن ط ــ هو الوسط المذكور ثم ينشأ على ط ــ مربع يكون هو المربع المطلوب أى المكافئ للمثلث ا ــ ح

لانه يلزم من كون ط ــ وسطا متناسبا بين القاعدة ــ ح ونصف الارتفاع اد أن يكون

ــ ح : ط ــ :: ط ــ : $\frac{1}{2}$ اد

فاذن يكون

$\overline{\text{ط ــ}}^{2}$ = ــ ح × $\frac{1}{2}$ اد

وحيث ان ــ ح × $\frac{1}{2}$ اد يساوى مساحة المثلث ا ــ ح يكون المربع المنشأ على ط ــ مكافئا للمثلث ا ــ ح وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم انه قد سبق حل هاتين المسئلتين بطريقة حسابية فى الامثلة المشروحة فى الدعوى الرابعة العملية

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ١٤٥ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مستطيل مثل ا د هـ ط على مستقيم معلوم مثل اد يكافئ مستطيلا مفروضا مثل ا ب و ح فطريقة ذلك أن يبحث عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة المعلومة وهى اد و اب و اح وليكن اط هو الرابع المتناسب المذكور ثم ينشأ مستطيل أحد ضلعيه المتجاورين اد والآخر اط فيكون هو المستطيل المطلوب أى المكافئ للمستطيل المفروض ا ب و ح

لانه يلزم من كون اط رابعا متناسبا مع الخطوط الثلاثة اد و اب و اح أن يكون

اد : اب :: اح : اط

فاذن يكون

اد × اط = اب × اح

أى ان المستطيل ادهـط مكافئ للمستطيل ابوح وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم انه قد سبق حل هذه المسئلة بطريقة حسابية فى الامثلة المقررة فى الدعوى الثانية العملية

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لشكل متوازى الاضلاع قاعدته تسعة اذرع وارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القاعدة فى مقدار الارتفاع فجذر حاصل الضرب هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب تسعة اذرع فى أربعة أذرع فيكون الحاصل من الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا وهو مقدار مساحة كل من المستطيل المعلوم والمربع المطلوب فاذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر

ستة

ستة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المكافئ لمثلث قاعدته اثنا عشر ذراعا وارتفاعه ستة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القاعدة فى نصف مقدار الارتفاع ثم يؤخذ جذر حاصل الضرب فيكون الناتج من الجذر هو مقدار ضلع المربع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب اثنا عشر ذراعا فى ثلاثة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا وهو مقدار مساحة كل من المثلث المعلوم والمربع المطلوب فاذا أخذ جذر الستة والثلاثين كان ناتج الجذر ستة أذرع وهو مقدار ضلع المربع المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ارتفاع المستطيل الذى مقدار قاعدته اثنا عشر ذراعا ليكون مكافئا لمستطيل معلوم مقدار قاعدته تسعة أذرع ومقدار ارتفاعه أربعة أذرع فطريقة ذلك أن يضرب مقدار قاعدة المستطيل المعلوم فى مقدار ارتفاعه ثم يقسم حاصل الضرب على مقدار القاعدة الاخرى التى يراد انشاء المستطيل عليها فيكون خارج القسمة هو مقدار الارتفاع المطلوب

ففى هذا المثال يضرب تسعة أذرع فى أربعة أذرع فيكون حاصل الضرب ستة وثلاثين ذراعا مربعا فاذا قسم هذا الحاصل على اثنى عشر ذراعا كان خارج القسمة ثلاثة أذرع وهو مقدار ارتفاع المستطيل المطلوب

(الدعوى التاسعة العملية)

(شكل ١٥٢ من اللوحة ٦)

اذا علم مربع مثل ح وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون مجموع ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل ا ب فطريقة ذلك أن يرسم نصف محيط قطره ا ب ثم يرسم مستقيم مثل ء ﻫ يوازى القطر ا ب

بشرط أن يكون البعد بينهما مساويا للخط اد المساوى لضلع المربع المعلوم • ثم ينزل على القطر اب عمود مثل هو من النقطة هـ التى هى تقاطع الخط د هـ بالمحيط فهذا العمود يقسم القطر اب الى قسمين هما او و وب والمستطيل المكون منهما هو المستطيل المطلوب لان مجموعهما يساوى اب ومستطيلهما او × وب يساوى مربع العمود هو كما تقرر ذلك فى نتيجة النظرية الثالثة والعشرين وحيث ان العمود هو يساوى العمود اد و اد يساوى ضلع المربع المعلوم • يكون هذا المستطيل مكافئا للمربع المعلوم • وهو المطلوب

• (تنبيه) •

يلزم لامكان حل هذه المسئلة ان لا يزيد البعد اد عن نصف القطر أعنى أن لا يزيد ضلع المربع المعلوم • عن نصف الخط المعلوم اب

• (امثلة) •

• (المثال الاول) •

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعا وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون محيطه ستة وعشرين ذراعا فطريقة ذلك أن ينصف المحيط فيكون الناتج ثلاثة عشر ذراعا وهو مقدار مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب

وحيث ان ضلع المربع المعلوم أقل من نصف هذا المجموع يعلم من ذلك أن حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ لمعرفة كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب يرمز بالحرف س لاحدهما فيكون الآخر مساويا للكمية ١٣ — س فاذن يكون

$$س (١٣ — س) = ٣٦ \quad أو$$

$$١٣ س — س^٢ = ٣٦ \quad أو$$

$$س^٢ — ١٣ س = — ٣٦ .$$

وبمقتضى

وبمقتضى القواعد المقررة فى الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١٣}{٢}\right)^{٢} - ٣٦} \quad \text{أو}$$

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{١٣}{٢}\right)^{٢} - \frac{٣٦ \times ٤}{٤}} \quad \text{أو}$$

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{١٦٩ - ١٤٤}{٤}} \quad \text{أو}$$

$$س = \frac{١٣}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٥}{٤}} = \frac{١٣}{٢} \pm \frac{٥}{٢}$$

فاذا أضيف الكسر الثانى الذى هو $\frac{٥}{٢}$ الى الكسر الاول الذى هو $\frac{١٣}{٢}$ كان الناتج مساويا لاحد بعدى المستطيل المطلوب انشاؤه واذا طرح الكسر الثانى من الكسر الاول كان الباقى مساويا لبعده الآخر فاذن يكون أحد بعدى المستطيل $\frac{١٣+٥}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٩$ والبعد الآخر $\frac{١٣-٥}{٢} = \frac{١٨}{٢} = ٤$ وذلك لان $٩ \times ٤ = ٣٦$ و $٩ + ٤ = ١٣$ و $١٣ \times ٢ = ٢٦$.

وحيث ان هذا المستطيل مشتمل على شروط المسئلة فهو المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته تسعة وأربعون ذراعا مربعا بحيث يكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل مساويا الاربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم سبعة أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع كذلك يعلم من ذلك ان حل هذه المسئلة ممكن وحينئذ لمعرفة كل من الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب يجرى العمل كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا مساحته أربع وستون ذراعا مربعا ويكون مجموع الضلعين المتجاورين من ذلك المستطيل أربعة عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يقال حيث ان ضلع المربع المعلوم ثمانية أذرع ونصف مجموع الضلعين المتجاورين من المستطيل سبعة أذرع يعلم من ذلك ان حل هذه

المسئلة غير ممكن

(الدعوى العاشرة العملية)
(شكل ١٥٣ من اللوحة ٦)

اذا علم مربع مثل ح وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضلعيه المتجاورين مساويا لخط معلوم مثل اب فطريقة ذلك أن يرسم محيط قطره الخط المعلوم اب ثم يقام على طرف هذا القطر عمود مثل اد ويؤخذ اد بقدر ضلع المربع المعلوم ح ثم يوصل مستقيم بين النقطة د والمركز ع فالمستقيمان دو و ده يكونان الضلعين المتجاورين من المستطيل المطلوب لان فاضلهما يساوى القطر هو أو القطر اب وحاصل ضربهما وهو ده × دو يساوى مربع اد كما تقرر ذلك فى نتيجة النظرية الثانية والثلاثين وحيث كان مربع اد يساوى المربع المعلوم ح يلزم أن يكون هذا المستطيل مكافئا للمربع المعلوم ح وهو المطلوب

(مثال)

اذا علم مربع مساحته ستة وثلاثون ذراعا مربعا مثلا وكان المطلوب انشاء مستطيل يكافئه ويكون فاضل ضلعيه المتجاورين تسعة أذرع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف س لاصغر الضلعين المتجاورين فيكون الضلع الآخر ٩ + س وتكون مساحة المستطيل (٩ + س) × س وحيث كان المطلوب أن يكون المستطيل مكافئا للمربع المعلوم وكانت مساحة المربع المعلوم ستة وثلاثين ذراعا مربعا يلزم أن يكون

(٩ + س) × س = ٣٦ أو

٩ س + س٢ = ٣٦ أو

س٢ + ٩ س = ٣٦ ومن هذه المعادلة ينتج أن

س = − ٩/٢ ± √(٨١/٤ + ٣٦) أو

س

$$س = -\frac{٩}{٢} \pm \sqrt{\frac{٩^٢}{٤} + \frac{٤ \times ٣٦}{٤}} = -\frac{٩}{٢} \pm \sqrt{\frac{٢٢٥}{٤}}$$ أو

$$س = -\frac{٩}{٢} \pm \frac{١٥}{٢} = + ٣ \text{ أو } س = -١٢$$

وحيث ان المقدار الثانى سالب لا يؤخذ الا الاول وحينئذ يكون أصغر الضلعين ثلاثة أذرع وأكبرهما $٩ + ٣ = ١٢$ ذراعا وحيث أن $٣ \times ١٢ = ٣٦$ و $١٢ - ٣ = ٩$ يكون هذا المستطيل هو المستطيل المطلوب لانه قد اشتمل على شروط المسئلة بتمامها

(تنبيهان)

الاول اعلم ان حل هذه الدعوى ممكن دائما

الثانى اذا كان المطلوب انشاء مستطيل يكافئ مربعا معلوما كان للمسئلة حلول لا حصر لعددها بمعنى ان المسئلة التى بهذا المنطوق سيالة لا ينحصر حلها فى مستطيل واحد

وذلك ان مربع الخط المماس اى يكافئ المستطيل الحادث من ضرب أى خط قاطع مد من النقطة ى مثل دو فى جزئه الخارج ده أى ان

$$\overline{اى}^٢ = دو \times ده = دوَ \times دهَ = دوً \times دهً \text{ الخ}$$

و وَ و هَ و وً و هً رموز لنقط التقاطع بفرض ان الخطوط دوَ و دوً الخ مرسومة

(الدعوى الحادية عشر العملية)

(شكل ١٤١ من اللوحة ٥)

اذا كان المطلوب تقسيم مستقيم محدود مثل ا ب الى قسمين أكبرهما وسط متناسب بين الخط الكلى والجزء الآخر فلذلك جملة حلول

(الحل الاول)

لتكن النقطة و هى نقطة التقسيم و او هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم أن يكون

اب : او :: او : وب

وقد تقرر فى علم الحساب ان نسبة مجموع الحدين الاولين الى الحد الاول كنسبة مجموع الحدين الاخيرين الى الحد الثالث فاذن يكون

اب + او : اب :: او + وب : او

وحيث ان او + وب = اب يكون

اب + او : اب :: اب : او

ومن هذه المناسبة ينتج أن

(اب + او) × او = $\overline{\text{اب}}^{2}$

فالمجهول فى هذه المعادلة هو او و اب + او

ويعلم من هذه المعادلة ان الخطين المجهولين هما ضلعا مستطيل فاضل ضلعيه يساوى الخط المعلوم اب ومساحته تساوى $\overline{\text{اب}}^{2}$ فاذن يمكن ايجاد ذلك المستطيل بما ذكر فى العملية السابقة فمن ذلك تنتج طريقة رسمية هى أن يقام العمود بح على اب من النهاية ب ويؤخذ بح مساويا لنصف الخط اب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر بح ويرسم محيط دائرة مركزه النقطة ح ثم يوصل المستقيم احه فيكون أحد الخطين المطلوبين = اه والآخر = اد لان فاضلهما ده = ٢ بح = اب ومستطيلهما او هو اه × اد = $\overline{\text{اب}}^{2}$

فاذن يكون اب + او = اه ويكون او = اد فاذا جعلت النقطة ا مركزا ورسم قوس دائرة نصف قطره يساوى اد كانت نقطة تقاطع هذا القوس بالخط المعلوم اب هى نقطة التقسيم المطلوبة فاذن يكون او هو القسم الاكبر المطلوب

(تنبيه)

قد تبين أن

او = اد = اح − حد = اح − حب وأن

اح

$$\text{ا ح} = \sqrt{\overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2}$$

فاذا رمز بالحرف ب للخط اب يكون

$$\text{اح} = \sqrt{\text{ب}^2 + \frac{\text{ب}^2}{4}} = \sqrt{\frac{5\,\text{ب}^2}{4}} = \frac{\text{ب}}{2}\sqrt{5}$$

و $\text{حد} = \frac{\text{ب}}{2}$ فاذن يكون

$$\text{او} = \frac{\text{ب}}{2}\sqrt{5} - \frac{\text{ب}}{2} = \frac{\text{ب}}{2} \times (\sqrt{5} - 1)$$

(الحل الثانى)

ليكن س هو القسم الاكبر المطلوب فعلى منطوق المسئلة يلزم أن يكون

$$\text{اب} : \text{س} :: \text{س} : \text{اب} - \text{س}$$

ومن هذه المتناسبة ينتج أن

$$\text{س}^2 = \text{اب} \times (\text{اب} - \text{س}) = \overline{\text{اب}}^2 - \text{س} \times \text{اب}$$

$$\text{او}\quad \text{س}^2 + \text{س} \times \text{اب} = \overline{\text{اب}}^2$$

وبمقتضى القواعد المقررة فى الدرجة الثانية من علم الجبر يكون

$$\text{س} = -\frac{\text{اب}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{اب}}{2}\right)^2 + \overline{\text{اب}}^2} \quad \text{أى}$$

$$\text{س} = \pm\sqrt{\left(\frac{\text{اب}}{2}\right)^2 + \overline{\text{اب}}^2} - \frac{\text{اب}}{2}$$

$$\text{أو}\quad \text{س} = +\sqrt{\left(\frac{\text{اب}}{2}\right)^2 + \overline{\text{اب}}^2} - \frac{\text{اب}}{2} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{و}\quad \text{سَ} = -\sqrt{\left(\frac{\text{اب}}{2}\right)^2 + \overline{\text{اب}}^2} - \frac{\text{اب}}{2} \quad \ldots\ldots (2)$$

وحيث ان مقدار سَ سالب ومقداره المطلق أكبر من الخط اب يعلم

ن ذلك أن المقدار الاول الذى هو $س = + \sqrt{(\frac{ب}{٢})^٢ + ا^٢}$
$- \frac{اب}{٢}$ هو الذى يوافق حل المسئلة وبالتأمل فى هذه المعادلة وملاحظة
اتقرر فى التنبيه العمومى المتعلق بالخطوط المتناسبة يعلم أن القسم الاكبر
المطلوب يتحصل بطرح نصف الخط المعلوم اب من وتر مثلث قائم الزاوية
حد ضلعى زاويته القائمة يساوى الخط المعلوم اب وضلعها الآخر
ساوى نصفه ومن هنا تنتج طريقة رسمية
هى أن يقام العمود بح على اب من نهايته ب ويؤخذ بح
$= \frac{اب}{٢}$ ويوصل اح ثم يطرح حب من حا أى يؤخذ حد
= حب فيكون اد مساويا للقسم الاكبر المطلوب فاذا أخذ او
= اد يقسم الخط المعلوم اب كما هو المطلوب ويكون

اب : او :: او : وب

(الحل الثالث)

أن يقام العمود بح على اب من نهايته ب ويؤخذ بح مساويا
لنصف الخط اب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر بح ويرسم محيط دائرة
مركزه النقطة ح ثم يوصل المستقيم اح فيقطع محيط الدائرة فى النقطة
د ثم يؤخذ او مساويا للبعد اد فينقسم الخط اب فى النقطة و
الى القسمين المطلوبين ويكون

اب : او :: او : وب

لانه يلزم من كون الخط اب عمودا ممتدا من نهاية نصف القطر بح أن
يكون مماسا للمحيط ولو مدّ الخط اح على استقامته جهة ح حتى قطع
المحيط فى النقطة هـ لحدث

اهـ : اب :: اب : اد

كما تقرر ذلك فى النظرية الثامنة والثلاثين وقد تقرر فى علم الحساب أن نسبة
المقدم ناقصا تاليه الى تاليه كنسبة المقدم الثانى ناقصا تاليه الى تاليه فاذن

يكون

يكون

اهـ ـ اب : اب :: اب ـ اد : اد

ويلزم من كون نصف القطر ب ح مساويا لنصف الخط اب أن يكون دهـ مساويا للخط اب ويلزم من هذا أن يكون

اهـ ـ اب = اد = او ، و

اب ـ اد = اب ـ او = ب و

فاذن يكون

او : اب :: ب و : او

وبتغيير موضع الوسطين يكون

اب : او :: او : ب و

وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن الخط اهـ ينقسم فى النقطة د كما ينقسم الخط اب فى النقطة و أعنى أن

اهـ : دهـ :: دهـ : اد

لانه قد تقرر أن

اهـ : اب :: اب : اد وأن اب = دهـ

فاذن يكون

اهـ : دهـ :: دهـ : اد

ثم ان هذا التقسيم يسمى بنسبة الوسط والطرفين يعنى أن الخط المقسوم بطريق نسبة الوسط والطرفين هو ما كانت نسبته لجزئه الاكبر كنسبة جزئه الاكبر لجزئه الاصغر وبعبارة أخرى هو ما كان مربع جزئه الاكبر مكافئا للمستطيل المكون من ذلك الخط وجزئه الاصغر وسيأتى استعمال هذا التقسيم

(الدعوى الثانية عشر العملية)

(شكل ٢٨٩)

اذا كان المطلوب رسم مستقيم يمس دائرتين فطريقة ذلك أن يقال ليكن م ڡ مستقيما مماسا للدائرتين من الخارج و س سَ مماسا لهما من الداخل ولتكن ح نقطة تقاطع م ڡ بخط المركزين ع عَ و حَ نقطة تقاطع س سَ بالخط ع عَ فيعلم من ذلك انه اذا علم موضع النقطتين حَ و حَ يكفي أن يمد من كل منهما مستقيم مماس لاحدى الدائرتين فيمس الاخرى وحينئذ تحل المسئلة فاذا وصل نصفا القطرين ع م و عَ ڡ يكون المثلث ع م ح مشابها للمثلث عَ ڡ ح ويلزم من تشابههما أن يكون

ع ح : عَ ح :: ع م : عَ ڡ ... (١)

ولو وصل نصفا القطرين ع س و عَ سَ لكان المثلث ع س حَ مشابها للمثلث عَ سَ حَ ويلزم من تشابههما أن يكون

ع حَ : عَ حَ :: ع س : عَ سَ

وحيث ان ع س = ع م و عَ سَ = عَ ڡ يكون

ع حَ : عَ حَ :: ع م : عَ ڡ ... (٢)

وحيث ان كلا من نصفي القطرين ع م و عَ ڡ معلوم يعلم من ذلك أن النقطتين ح و حَ نقطتان مقترنتان قاسمتان للبعد ع عَ الى قسمين النسبة بينهما ثابتة ومساوية للنسبة المعلومة ع م : عَ ڡ ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي أن يرسم في الدائرة ع قطر كيف اتفق مثل القطر ك ع كَ ثم يمد من النقطة عَ نصف قطر مثل عَ ل يوازي ع ك ثم يوصل ك ل و كَ ل فتكون النقطتان ح و حَ الحادثتان من

تقاطع

تقاطع خط المركزين بالمستقيمين ك ل و كَ لَ النقطتين المطلوبتين
لانه يلزم من كون ح ك مواز بالخط حَ لَ أن يكون

ح ه : حَ ه :: ح ك : حَ لَ

وحيث ان حَ ك = ح م و حَ لَ = حَ نَ يكون

ح ه : حَ ه :: ح م : حَ نَ

وكذا يلزم من تساوى الزوايا المتناظرة من المثلثين ح هَ ك و حَ هَ ل
أن يكون

ح هَ : حَ هَ :: ح م : حَ نَ

فحينئذ اذا امتد من كلتا النقطتين ه و هَ مماس لدائرة ح أو للدائرة
حَ كان مماسا للاخرى

• (مناقشات) •

الاولى اذا كان البعد بين المركزين ح حَ أكبر من مجموع نصفى قطرى الدائرتين امكن أن يمد أربعة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يماسانهما من الخارج بأن تكون نقطة تلاقيهما بخط المركزين غير محصورة بين المركزين المذكورين والاثنان الآخران يماسانهما من الداخل بان تكون نقطة تلاقيهما بخط المركزين محصورة بين هذين المركزين

والثانية اذا كان البعد بين المركزين ح حَ مساويا لمجموع نصفى قطرى الدائرتين امكن أن يمد ثلاثة خطوط مستقيمة كل منها يمس الدائرتين لكن اثنان منها يماسانهما من الخارج والثالث يمسهما من الداخل

والثالثة اذا كان البعد بين المركزين ح حَ أصغر من مجموع نصفى قطرى الدائرتين وأكبر من فاضلهما امكن أن يمد خطان مستقيمان كلاهما يمس

الدائرتين من الخارج فقط

والرابعة اذا كان البعد بين المركزين ح حَ مساويا للفاضل نصفى قطرى الدائرتين امكن أن يمد مستقيم يمسهما من الخارج فقط

والخامسة اذا كانت احدى الدائرتين داخل الاخرى لا يمكن أن يمد مستقيم يمسهما لا من الخارج ولا من الداخل لان المستقيم الذى يمس محيط الدائرة الصغرى يقطع محيط الكبرى كما هو واضح

(تنبيه)

اعلم أن حل هذه المسئلة بهذه الطريقة اسهل من حلها بالطريقة المعتادة المشروحة فى ملحقات المقالة الثانية

(الدعوى الثالثة عشر العملية)

(شكل ٢٩٠)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين معلومتين مثل ا و ب ويمس مستقيما وضعه معين مثل ل م

فطريقة ذلك أن يقال لتكن ح هى نقطة تماس المحيط المطلوب بالمستقيم المعلوم فلو وصل المستقيم ب ا ومد على استقامته جهة ا حتى قطع المستقيم المعلوم فى نقطة مثل هـ للزم أن يكون

هـ ب : هـ ح :: هـ ح : هـ ا

فيعلم من هذه المناسبة أن البعد بين نقطة التماس ح ونقطة تقاطع المستقيم المعلوم بالمستقيم المار بالنقطتين المعلومتين وسط متناسب بين المستقيمين هـ ب و هـ ا ومن هنا تنتج طريقة رسمية

هى أن يوصل مستقيم بين النقطتين المعلومتين ويمد حتى يقطع المستقيم المعلوم فى نقطة مثل هـ ثم يبحث عن الوسط المتناسب بين المستقيمين هـ ب و هـ ا

ثم يؤخذ من المستقيم المعلوم ل م البعد هـ ح أو هـ حَ بقدر الوسط المتناسب المذكور فتكون النقطة ح أو حَ نقطة تماس المحيط المطلوب بالمستقيم

بالمستقيم المعلوم ل م
ولرسم هذا المحيط يمد من النقطة و عمود مثل و ر على ل م ثم يقام
عمود مثل ـ ك على وسط المستقيم ا ـ فالنقطة ح التى هى تقاطع
العمودين تكون مركز المحيط المطلوب ويكون ح و نصف قطره وبهذا تحل
المسئلة .

(تنبيه)

الوسط المتناسب الذى يحدث من هذه المناسبة
هـ ـ : س :: س : ها
يمكن رسمه فى الشكل بعينه بسهولة وذلك أن يرسم على هـ ـ نصف محيط
دائرة ويقام من النقطة ا العمود اد فالوتر هـ د يكون هو الوسط
المتناسب المطلوب ويكفى بعد ذلك أن يؤخذ هـ و بقدر هـ د

(مناقشات)

حل هذه المسئلة ممكن دائما مادامت النقطتان ا و ـ موضوعتين
فى جهة واحدة بالنسبة للخط ل م وفى هذه الحالة يمكن رسم دائرتين
كلتاهما توافق حل المسئلة لكن احداهما تمس المستقيم المعلوم ل م
فى النقطة و والاخرى تمسه فى النقطة وَ التى بعدها عن النقطة هـ
بقدر الوسط المتناسب هـ د .
ولا يمكن حلها اذا كان المستقيم المعلوم واقعا بين النقطتين ا و ـ
وحين يكون المستقيم ا ـ المار بالنقطتين المعلومتين ا و ـ موازيا
للمستقيم المعلوم ل م فلا يكون هنا الوسط متناسب يمكن رسمه فى هذه
الحالة نقطة تماس المستقيم المعلوم ل م بالمحيط المطلوب توجد لا محالة
فى تقاطع المستقيم المعلوم ل م بالعمود المقام على وسط المستقيم ا ـ
ولا يوجد فى هذه الحالة الا محيط واحد يوافق حل المسئلة

(الدعوى الرابعة عشر العملية)

(شكل ٢٩١)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمس ضلعي زاوية ويمر بنقطة معينة فيهما

فطريقة ذلك أن تنصف الزاوية المعلومة بالمستقيم ل ه ثم ينزل من النقطة ا عمود مثل ا ه آ على ل ه ويؤخذ آ ه بقدر ا ه فالمحيط الذي يكون مركزه على ل ه ويمر بالنقطة ا يمر أيضا بالنقطة آ وحينئذ تؤول هذه المسئلة الى السابقة

واعلم أنه يمكن رسم دائرتين كلتاهما توافق حل المسئلة

(الدعوى الخامسة عشر العملية)

(شكل ٢٩٢)

اذا كان المطلوب رسم محيط دائرة يمر بنقطتين مثل ا و ب ويمس محيط دائرة أخرى معلومة مثل ح

فطريقة ذلك أن يقال ليفرض أن المسئلة محلولة وأن ا م ب هو المحيط المطلوب فلومد المماس المشترك م د حتى قابل القاطع ا ب ومد من النقطة د مستقيم مثل د ه ن قاطع لمحيط الدائرة المعلومة ح لزم أن يكون

$$\overline{دم}^2 = د ب \times د ا \quad أو$$

$$\overline{دم}^2 = د ن \times د ه$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$د ن \times د ه = د ب \times د ا$$

ويعلم من هذه المتساوية أن المحيط الذي يمر بالنقط ب و ا و ه يمر بالنقطة ن وحيث ان القاطع د ه ن ممدود بالاختيار من النقطة د تكون النقطة ه من جملة نقط المحيط ومن هنا تنتج طريقة رسمية .

هي أن يمرر بالنقطتين المعلومتين ب و ا محيط دائرة يقطع محيط الدائرة

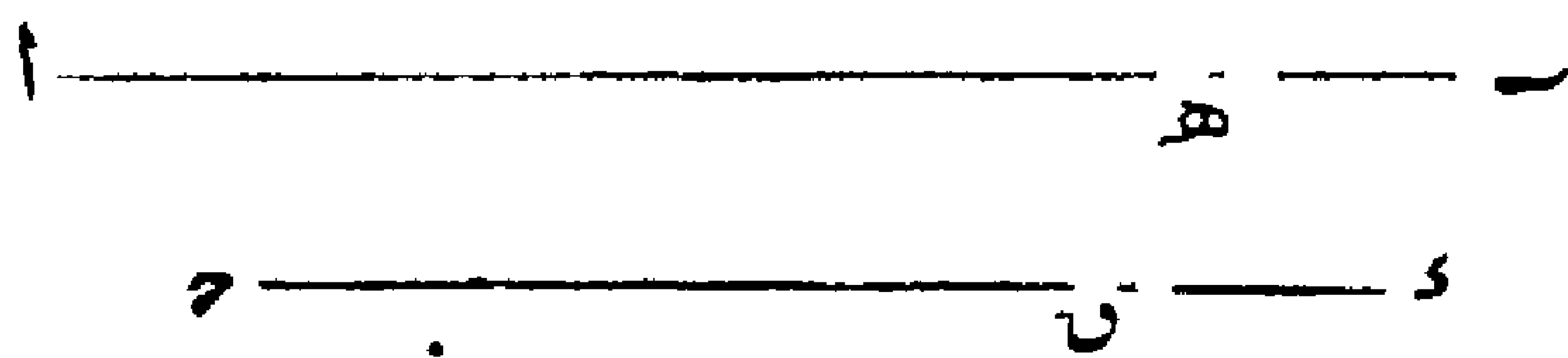
المعلومة

المعلومة ح فى نقطتين مثل هـ و ن ثم يوصل المستقيمان ا ب و هـ ن ويمدان حتى يلتقيا فى نقطة مثل ى ثم يمد من النقطة ى مستقيم مثل ى م يمس محيط الدائرة المعلومة ح فالنقطة م تكون نقطة تماس المحيطين وحينئذ يسهل رسم المحيط المطلوب

وحيث انه يمكن أن يمد من النقطة ى مستقيم آخر مثل ى مَ يمس محيط الدائرة ح يعلم من ذلك أن لهذه المسئلة حلين

(الدعوى السادسة عشر العملية)

اذا علم مستقيمان غير اصمين مثل ا ب و ح ى وكان المطلوب ايجاد أكبر مقياس مشترك بينهما كهذين



فطريقة ذلك أن يوضع الخط الاصغر ح ى على الاكبر ا ب مرة أو أكثر بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل الخط الاكبر ا ب على الخط الاصغر ح ى مرة واحدة مثلا وفضل باق مثل ب هـ أصغر من ح ى يوضع أيضا هذا الباقى ب هـ على الخط الاصغر ح ى فاذا اشتمل الخط ح ى على ب هـ مرتين مثلا وفضل باق مثل ى ن أصغر من ب هـ يوضع أيضا الباقى الثانى ى ن على الباقى الاول ب هـ فاذا اشتمل ب هـ على ى ن ثلاث مرات بدون باق كان ى ن أكبر مقياس مشترك بين المستقيمين المعلومين ا ب و ح ى

لان الباقى الاخير ى ن انما تحصل باتباع القاعدة المقررة فى علم الحساب المستعملة فى ايجاد القاسم الاعظم المشترك بين عددين

(تنبيه)

لايجاد النسبة بين المستقيمين ا ب و ح ى بعد معرفة أكبر مقياس مشترك

بينهما يقال حيث تبين ان

$$ـه = ٣ دن$$
و
$$حد = ٢ ـه + دن = ٦ دن + دن = ٧ دن$$ و
$$اـ = حد + ـه = ٧ دن + ٣ دن = ١٠ دن$$

يكون

$$اـ : حد :: ١٠ دن : ٧ دن$$

وبقسمة حدى النسبة الثانية على دن يكون

$$اـ : حد :: ١٠ : ٧$$

(الدعوى السابعة عشر العملية)

اذا علم قوسان غير اصمين وكان المطلوب ايجاد أكبر مقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يقال حيث انه يمكن أن يوضع أحد القوسين على الآخر الذى نصف قطره كنصف قطر القوس الاول كما يمكن أن يوضع مستقيم على مستقيم آخر نحصل أكبر مقياس مشترك بين القوسين المعلومين بعملية مشابهة للتى عملت لايجاد أكبر مقياس مشترك بين مستقيمين معلومين

(تنبيه)

اذا علمت زاويتان وكان المطلوب ايجاد أكبر مقياس مشترك بينهما فطريقة ذلك أن يرسم قوسان يحددان اضلاع الزاويتين المعلومتين بشرط أن يكون نصف القطر فى كليهما واحدا ثم يبحث عن أكبر مقياس مشترك بين هذين القوسين لتعلم النسبة بينهما فتكون النسبة المطلوبة مساوية للنسبة بين هذين القوسين

لانه قد تقرر فى تنبيه النظرية الثامنة عشر من المقالة الثانية انه اذا كان بين القوسين المأخوذين فى دائرة واحدة أو فى دائرتين متساويتين مقياس مشترك كانت نسبة أحد القوسين الى الآخر كنسبة الزاوية المقابلة للقوس الاول الى الزاوية المقابلة للقوس الثانى

(الدعوى الثامنة عشر العملية)

اذا

اذا علم مستقيمان مثل اب و حد وكان المطلوب ايجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بينهما كهذين

ب ـــ ن ـــ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ـ ا

د ــــــــــــــــــ هـ ـــــ ح

فطريقة ذلك أن يقال ليكن المطلوب ايجاد نسبة اب الى حد بأقل من عشر (أى ان المقدار المتروك يكون أقل من عشر) فلذلك يؤخذ الخط حه بقدر عشر حد ثم يوضع حه على اب مرة أو أكثر بقدر عدد مرات انحصاره فيه فاذا اشتمل اب على حه سبع مرات مثلا وفضل باق مثل ب ن أصغر من حه كانت النسبة بين الخطين اب و حد محصورة بين هذين العددين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$ فالعدد الاول $\frac{٧}{١٠}$ أقل من النسبة المطلوبة بأقل من عشر والعدد الثانى $\frac{٨}{١٠}$ أكثر من النسبة المطلوبة بأقل من عشر

لانه يلزم من كون اب > حد × $\frac{٧}{١٠}$ و اب < حد × $\frac{٨}{١٠}$ أن تكون نسبة اب الى حد محصورة بين $\frac{٧}{١٠}$ و $\frac{٨}{١٠}$

(تنبيه)

بمثل هذه الطريقة يتحصل مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين أو زاويتين معلومتين عندما يكون مقام الكسر الدال على درجة التقريب قوة للعدد ٢ غير أن الطريقة الآتية عمومية لانها صالحة لجميع الحالات

(الدعوى التاسعة عشر العملية)

اذا كان المطلوب ايجاد مقدار مقرب من النسبة الكائنة بين قوسين معلومين أو زاويتين معلومتين

فطريقة ذلك أن يقال ليكن ا و ب القوسين المعلومين أو القوسين اللذين نسبتهما تساوى نسبة الزاويتين المعلومتين فلايجاد النسبة بين ا و ب مقربة بأقل من سبع مثلا يضرب المقدار ا فى ٧ ثم يوضع ب على

٧ ا مرارا بقدر انحصاره فيه فاذا اشتمل ٧ ا على ب خمس عشرة مرة وفضل باق يوجد ان

٧ ا > ب × ١٥ و ٧ ا < ب × ١٦

فاذن يكون

ا > ب × ١٥/٧ و ا < ب × ١٦/٧

ويعلم من ذلك أن نسبة ا الى ب محصورة بين ١٥/٧ و ١٦/٧ فالمقدار الاول ١٥/٧ ينقص عن النسبة المطلوبة بأقل من سبع والمقدار الثانى ١٦/٧ يزيد على النسبة المطلوبة بأقل من سبع

(تنبيه)

اعلم انه يمكن استعمال هذه الطريقة لايجاد مقدار يقرب من النسبة الكائنة بين مستقيمين معلومين

(الدعوى العشرون العملية)

(شكل ١٥٤ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين قطر المربع وضلعه

فطريقة ذلك ان يقال ليكن ا ب ح د مربعا و ا ح قطره فلايجاد نسبة تقريبية بين القطر ا ح والضلع ح ب يوضع الضلع ح ب على القطر ا ح وذلك بان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر ح ب ويركز فى النقطة ح ويرسم نصف دائرة فيظهر أن القطر ا ح قدر الضلع ح ب مرة واحدة ويبقى كسر مثل اد أصغر من ح ب فاذن يكون

اح/حب = ١ + اد/حب = ١ + اد/اب .... (١)

ولمعرفة مقدار الكسر اد يقال يلزم من كون الزاوية ا ب ح قائمة أن يكون الخط اب مماسا للمحيط ويلزم من هذا أن يكون

اد : اب :: اب : اه أو

اد/اب = اب/اه كما تقرر ذلك فى النظرية الثانية والثلاثين

وحيث ان الخط اه يشتمل على اب مرتين ويبقى كسر مثل اد أصغر

من

من اب يكون

$$\frac{اد}{اب} = \frac{اب}{٢اب + اد} = \frac{١}{٢ + \frac{اد}{اب}}$$

وبهذا تؤل المعادلة (١) الى هذه الصورة

$$\frac{اج}{اب} = ١ + \frac{١}{٢ + \frac{اد}{اب}} \quad \ldots\ldots \quad (٢)$$

وحيث ان $\frac{اد}{اب} = \frac{١}{٢ + \frac{اد}{اب}}$ يكون

$$\frac{اج}{اب} = ١ + \frac{١}{٢ + \frac{١}{٢ + \frac{اد}{اب}}}$$

ويعلم من ذلك أن هذا الكسر كسر متسلسل غير متناه فاذا حسب مقدار هذا الكسر الى الحد الرابع يوجد أن

$$\frac{اج}{اب} = ١ + \frac{١٢}{٢٩} = \frac{٤١}{٢٩}$$

أى ان النسبة التقريبية بين قطر المربع وضلعه هى :: ٤١ : ٢٩ واذا حسبت جملة حدودا كثر من السابقة سهل تحصيل نسبة اكثر قربا من هذه النسبة وقد ذكرنا فى النتيجة الثانية من النظرية العاشرة ان نسبة قطر المربع لضلعه كنسبة جذر الاثنين للواحد وعاذكر يحل ماتذكره من الامثلة فنقول

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب ايجاد قطر المربع الذى ضلعه خمسة أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار الضلع المعلوم فى هذه النسبة $\frac{٤١}{٢٩}$ فاذن يكون

$$س = ٥ \times \frac{٤١}{٢٩} = \frac{٢٠٥}{٢٩} = \frac{٢}{٢٩} + ٧$$

او يضرب مقدار الضلع المعلوم فى $\sqrt{٢}$ فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب ايجاد ضلع المربع الذى قطره احد عشر ذراعا

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار القطر المعلوم فى هذه النسبة $\frac{٢٩}{٤١}$ او يقسم القطر المعلوم على $\sqrt{٢}$ فيحصل المطلوب

(الدعوى الحادية والعشرون العملية)

اذا كان المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مستطيلين معلومين

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ا لاحد بعدى المستطيل الاول وبالحرف ب لبعده الآخر وبالرمزين آ و بَ لبعدى المستطيل الثانى وبالحرفين س و ص للمستقيمين المطلوبين ثم يقال حيث كان المطلوب أن يكون

س : ص :: ا × ب : آ × بَ ينتج أن

$$س = \frac{ا \times ب \times ص}{آ \times بَ}$$

وحيث ان احد الخطين اختيارى فلا مانع من فرض الخط ص مساويا للخط بَ او الخط آ فاذا جعل ص = بَ آلت المعادلة السابقة الى هذه

$$س = \frac{ا \times ب}{آ}$$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

آ : ا :: ب : س

فيعلم من ذلك أن ثانى الخطين المطلوبين س رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة آ و ا و ب فاذا بحث عن هذا الرابع المتناسب كانت نسبته الى الخط بَ مساوية لنسبة المستطيل ا × ب الى المستطيل آ × بَ وبماذكر يعلم ماذكره من الامثلة فنقول

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مربعين معلومين مثل $ا^٢$ و $آ^٢$ فطريقة ذلك أن يبحث عن الثالث المتناسب مع الخطين آ و ا

المثال

* (المثال الثانى) *

أن يكون المطلوب ايجاد مستقيمين تكون النسبة بينهما مساوية للنسبة بين مثلثين أو شكلين كثيرى الاضلاع معلومين فطريقة ذلك أن يقال حيث انه يمكن تحويل أى شكل كثير الاضلاع الى مربع يكافئه يعلم من ذلك انه لايجاد المستقيمين المطلوبين يلزم ان يبحث عن ضلع المربع المكافئ لاحد الشكلين المعلومين وعن ضلع المربع المكافئ للشكل الآخر فالثالث المتناسب مع ضلعى هذين المربعين يكون هو المطلوب

* (المثال الثالث) *

اذا كان المطلوب ايجاد مستقيمين مثل س و ص تكون نسبة احدهما الى الآخر كنسبة حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة مثل ا و ب و ح الى حاصل ضرب ثلاثة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل آ و بَ و حَ

فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

$$\text{س} : \text{ص} :: \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح} : \text{آ} \times \text{بَ} \times \text{حَ}$$

ينتج من ذلك أن

$$\text{س} = \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح} \times \text{ص}}{\text{آ} \times \text{بَ} \times \text{حَ}}$$

وحيث ان احد الخطين المطلوبين اختيارى يمكن ان يجعل $\text{ص} = \text{حَ}$ وحينئذ يكون

$$\text{س} = \frac{\text{ا} \times \text{ب} \times \text{ح}}{\text{آ} \times \text{بَ}} = \frac{\text{ا} \times \text{ب}}{\text{آ}} \times \frac{\text{ح}}{\text{بَ}}$$

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث اولا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة آ و ا و ب وليكن ل مثلا وثانيا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة بَ و ل و ح وليكن لَ فيكون لَ مساويا

لمقدار الخط المجهول س′ وحينئذ يكون

ل′ : ح′ :: ا × ب × ح : ا′ × ب′ × ح′

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب ايجاد مستقيمين مثل س و ص′ تكون نسبة أحدهما الى الآخر كنسبة حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة معلومة مثل ا و ب و ح و د الى حاصل ضرب أربعة خطوط مستقيمة معلومة كذلك مثل ا′ و ب′ و ح′ و د′

فطريقة ذلك أن يقال حيث كان المطلوب أن يكون

س : ص :: ا × ب × ح × د : ا′ × ب′ × ح′ × د′

ينتج أن

س = (ا × ب × ح × د × ص′) / (ا′ × ب′ × ح′ × د′)

وحيث ان احد الخطين اختياري يمكن أن يجعل ص′ = د′ وحينئذ يكون

س = (ا × ب × ح × د) / (ا′ × ب′ × ح′) = (ا × ب)/ا′ × ح/ب′ × د/ح′

فيعلم من هذه المعادلة انه يلزم ان يبحث اولا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ا′ و ا و ب وليكن ل مثلا وثانيا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ب′ و ل و ح وليكن ل′ وثالثا عن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة ح′ و ل′ و د وليكن ل″ فيكون احد المستقيمين المطلوبين س = ل″ والمستقيم الآخر ص = د′ فاذن يكون

ل″ : د′ :: ا × ب × ح × د : ا′ × ب′ × ح′ × د′

وهو

وهو المطلوب

وكل مثال من هذا القبيل يحل بالطريقة المذكورة

(الدعوى الثانية والعشرون العملية)

(شكل ١٤٦ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مثلث يكافئ شكلا كثير الاضلاع معلوما فطريقة ذلك أن يقال ليكن ا ب ح ى هـ الشكل المعلوم فيوصل اولا القطر ح هـ الذى يفصل المثلث ح ى هـ ثم يرسم من النقطة ى مستقيم مثل ى و يوازى ح هـ ويمتد حتى يقطع الامتداد ا هـ ثم يوصل ح و فيكون الشكل الكثير الاضلاع ا ب ح ى هـ مكافئا للشكل ا ب ح و الناقص عنه ضلعا لان للمثلثين ح ى هـ و ح و هـ قاعدة مشتركة هى ح هـ وارتفاعا مشتركا لان رأسيهما ى و و موضوعان على الخط ى و الموازى للقاعدة فاذن يكون هذان المثلثان متكافئين فاذا اضيف لكل منهما الشكل ا ب ح هـ ينتج أن الشكل ا ب ح ى هـ مكافئ للشكل ا ب ح و ويمثل هذا يمكن فصل الزاوية ب بان يبدل المثلث ا ب ح بالمثلث ا ر ح المكافئ له وحينئذ يتحول المخمس ا ب ح ى هـ الى مثلث يكافئه وهو ر ح و

وهذه الطريقة يمكن تطبيقها على أى شكل كثير الاضلاع كائنا ما كان عدد أضلاعه لان الشكل الذى يكون عدد اضلاعه م مثلا يتحول فى المرة الاولى الى شكل يكافئه عدد اضلاعه م — ١ وهذا يتحول الى شكل آخر يكافئه عدد اضلاعه م — ٢ وهكذا فلا بد أن ينتهى هذا التحويل الى مثلث يكافئ الشكل المفروض

(تنبيه)

قد تقدم أن كل مثلث يمكن تحويله الى مربع يكافئه وذكرنا عملية ذلك فى الدعوى السابعة العملية فحينئذ يمكن دائما انشاء مربع يكافئ مضلعا

مستويا معلوما وهذا هو المسمى بتربيع الشكل المستقيم الاضلاع ومسئلة تربيع الدائرة مقصورة على ايجاد مربع يكافئ دائرة قطرها معين

(الدعوى الثالثة والعشرون العملية)

(شكل ١٤٧ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء مربع يساوى مجموع مربعين معلومين او فاضلهما فطريقة ذلك أن يقال ليكن ا ضلع احد المربعين المعلومين و ب ضلع المربع الآخر فلايجاد مربع يساوى مجموع هذين المربعين يرسم مستقيمان متعامدان مثل هـ و و هـ ح غير متناهيين ثم يؤخذ هـ د بقدر الضلع ا و هـ ر بقدر الضلع ب ويوصل د ر فيكون د ر هو ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون المثلث د هـ ر قائم الزاوية فى هـ أن يكون المربع المنشأ على الوتر د ر مساويا لمجموع المربعين المنشأين على الضلعين د هـ و هـ ر فاذن يكون

$$\overline{\text{د ر}}^2 = \overline{\text{د هـ}}^2 + \overline{\text{هـ ر}}^2$$

وحيث ان د هـ = ا و هـ ر = ب يكون

$$\overline{\text{د ر}}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2$$ وهو المطلوب

ولايجاد مربع يساوى فاضل هذين المربعين المعلومين نرسم مستقيمان متعامدان مثل ع ح و هـ و غير متناهيين ثم يؤخذ البعد هـ ر بقدر أصغر الضلعين المعلومين ا و ب ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر البعد ر ع المساوى لاكبر الضلعين المعلومين ا و ب ويركز فى النقطة ر ويرسم قوس دائرة يقطع الخط هـ ع فى نقطة مثل ع فيكون هـ ع هو ضلع المربع المساوى للفاضل بين المربعين المعلومين ا^2 و ب^2

لانه يلزم من كون المثلث هـ ر ع قائم الزاوية فى هـ أن يكون المربع المنشأ على الضلع هـ ع مساويا للفاضل بين مربع الوتر ر ع ومربع

الضلع

الضلع الآخر هر أعني أن

$$\overline{هح}^2 = \overline{رح}^2 - \overline{هر}^2$$

وحيث ان رح = ا و هر = ب يكون

$$\overline{هح}^2 = ا^2 - ب^2$$ وهو المطلوب

(تنبيه)

يمكن ايجاد مربع يساوى مجموع مربعات بقدر ما يراد لان العملية التى بواسطتها يتحول المربعات الى مربع واحد يتحول بها ثلاث مربعات الى مربعين وهذان المربعان يتحولان الى واحد

وكذا يمكن ايجاد مربع يساوى الفاضل بين جملة مربعات وجملة مربعات اخر أقل من مجموع الاول

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يساوى مجموع ثلاثة مربعات معلومة فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف س لضلع المربع المطلوب وبالحرف ح لضلع المربع الاول وبالحرف ى لضلع المربع الثانى وبالحرف هـ لضلع المربع الثالث فعلى منطوق المثال يكون

$$س^2 = ح^2 + ى^2 + هـ^2$$

ويعلم من هذه المعادلة انه يلزم أن يبحث عن مربع يساوى مجموع المربعين الاولين $ح^2$ و $ى^2$ وليكن $م^2$ ثم يبحث عن مربع يساوى $م^2 + هـ^2$ وليكن $ن^2$ فيكون $ن^2$ هو المربع المطلوب

وعملية الرسم أن ترسم زاوية قائمة مثل ب ا ح كما فى (الشكل ٢٩٣) ويؤخذ البعد اح = ح والبعد اى = ى ويوصل ى ح ثم يقام العمود ىو على بح ويؤخذ البعد ى هـ = هـ ويوصل هـ ح

فيكون هـ ح هو ضلع المربع المطلوب

* (المثال الثاني) *

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يساوي الفاضل بين خمسة مربعات معلومة وثلاثة مربعات اخر معلومة كذلك

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف س لضلع المربع المطلوب وبالحروف ا و ب و ج و د و هـ لاضلاع المربعات الخمسة وبالرموز اَ و بَ و جَ لاضلاع المربعات الثلاثة التي يراد طرحها من المربعات الاول فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + \text{د}^2 + \text{هـ}^2 - \text{اَ}^2 - \text{بَ}^2 - \text{جَ}^2 \quad \text{أو}$$

$$\text{س}^2 = \text{ا}^2 + \text{ب}^2 + \text{ج}^2 + \text{د}^2 + \text{هـ}^2 - (\text{اَ}^2 + \text{بَ}^2 + \text{جَ}^2)$$

ويعلم من هذه المتساوية انه يلزم أن يبحث أولا عن مربع مثل م² يساوي مجموع المربعات ا² و ب² و ج² و د² و هـ² وثانيا عن مربع مثل مَ² يساوي مجموع المربعات اَ² و بَ² و جَ² ثم يبحث عن مربع مثل ك² يساوي الفاضل بين هذين المربعين م² و مَ² فيكون ك² هو المربع المطلوب

* (المثال الثالث) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوي لمجموع مربعين ضلع أحدهما يساوي أربع أذرع وضلع الآخر يساوي ثلاث أذرع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف س لضلع المطلوب فعلى منطوق المسئلة يكون

$$\text{س}^2 = ٤^2 + ٣^2 = ١٦ + ٩ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

سـ

$$س = \sqrt{٢٥} = ٥$$

أعنى ان ضلع المربع المطلوب يساوى خمسة أذرع

* (المثال الرابع) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المساوى لفاضل مربعين ضلع أحدهما يساوى ثلاثة عشر ذراعا وضلع الآخر يساوى اثنى عشر ذراعا فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف س للضلع المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$س^٢ = ١٣^٢ - ١٢^٢ = ١٦٩ - ١٤٤ = ٢٥$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$س = \sqrt{٢٥} = ٥$$

أعنى ان ضلع المربع المطلوب يساوى خمس أذرع

* (الدعوى الرابعة والعشرون العملية) *

* (شكل ١٥٠ من اللوحة ٦) *

اذا كان المطلوب انشاء مربع نسبته الى المربع المعلوم ا ب ح ى كنسبة خط معلوم مثل ك لخط آخر كذلك مثل ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه مثل هـ ر ويؤخذ عليه البعد هـ و = ك والبعد و ر = ل ويرسم نصف محيط قطره هـ ر ويقام من النقطة و العمود و ع على القطر ثم يوصل الوتران ع هـ و ع ر ويمدان بغير تحديد ثم يؤخذ ع ب يساوى ا ب الذى هو ضلع المربع المعلوم ثم يمد من النقطة ب مستقيم مثل ب ط يوازى هـ ر فيكون ع ط ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من توازى هـ ر و ط ب أن يكون

ع ط : ع ب :: ع هـ : ع ر

وقد تقرر فى علم الحساب ان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة فاذن يكون

$\overline{ح ط}^{٢} : \overline{ح ـ}^{٢} :: \overline{ح هـ}^{٢} : \overline{ح ر}^{٢}$ . . . . (١)

وحيث ان المثلث هـ ح ر قائم الزاوية فى ح يكون

$\overline{ح هـ}^{٢} : \overline{ح ر}^{٢} :: هـ و : ور$ أو :: الخط ك : الخط ل

كما تقرر ذلك فى النظرية الثالثة والعشرين ويلزم من اشتراك نسبة $\overline{ح هـ}^{٢}$: $\overline{ح ر}^{٢}$ فى هذه المتناسبة وفى المتناسبة (١) أن يكون

$\overline{ح ط}^{٢} : \overline{ح ـ}^{٢}$ :: الخط ك : الخط ل

وحيث كان ح ـ = ا ـ يلزم أن يكون

$\overline{ح ط}^{٢} : \overline{ا ـ}^{٢}$ :: الخط ك : الخط ل

والمطلوب أن يكون

$\overline{س}^{٢} : \overline{ا ـ}^{٢}$ :: الخط ك : الخط ل

فاذن يكون $\overline{س}^{٢} = \overline{ح ط}^{٢}$ وهو المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

اذا علم مربع مثل ا ـ ح ى كما فى (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء مربع ضعفه

فطريقة ذلك أن يوصل القطر ـ ى ويؤخذ ـ هـ بقدر ـ ى فيكون ـ هـ ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون $\overline{ـ ى}^{٢} = \overline{ـ ح}^{٢} + \overline{ح ى}^{٢} = ٢ \overline{ـ ح}^{٢}$ أن يكون

$\overline{ـ هـ}^{٢} = ٢ \overline{ـ ح}^{٢}$ وهو المطلوب

(المثال الثانى)

اذا

اذا علم مربع مثل ا ب ح ء كما في (الشكل ٢٩٤) وكان المطلوب انشاء مربع يكون ثلاثة أمثاله في السطح

فطريقة ذلك أن يوصل القطر ب ء ويؤخذ ب هـ بقدر ب ء ثم يقام العمود هـ و على ب هـ ويمد هـ و حتى يقطع ب ء ثم يؤخذ هـ ع بقدر ب ح ويوصل ع و فيكون ع و ضلع المربع المطلوب

لانه يلزم من كون $\overline{\text{ع و}}^2 = \overline{\text{ع هـ}}^2 + \overline{\text{هـ و}}^2$ و

$\overline{\text{هـ و}}^2 = 2 . \overline{\text{ب ح}}^2$ أن يكون

$\overline{\text{ع و}}^2 = 3 \overline{\text{ب ح}}^2$ وهو المطلوب

(طريقة أخرى)

ليكن س ضلع المربع المطلوب و ح ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^2 = 3 \text{ح}^2 \text{ أو } \text{س}^2 = \text{ح} \times 3 \text{ح}$$

ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$\text{ح} : \text{س} :: \text{س} : 3 \text{ح}$$

فيعلم من هذه المناسبة أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوي ضلع المربع المعلوم والآخر يساوي ثلاثة أمثاله

(المثال الثالث)

اذا علم مربع مثل ح^2 وكان المطلوب ايجاد مربع آخر مساحته مساوية لمساحة المربع المعلوم مضروبة في كمية معينة مثل م

فطريقة ذلك أن يقال ليكن س ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^2 = \text{ح}^2 \times \text{م} = \text{ح} \times \text{ح م}$$

ويعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى حاصل ضرب هذا الضلع فى الكمية المراد ضرب المربع المعلوم فيها فحينئذ اذا بحث عن الوسط المتناسب المذكور والذى علیه مربع كان هو المربع المطلوب

(المثال الرابع)

اذا علم مربع ضلعه ح وكان المطلوب ايجاد ضلع مربع آخر مساحته مساوية لمساحة المربع المعلوم مقسومة على كمية معينة مثل م

فطريقة ذلك أن يقال ليكن س ضلع المربع المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{س}^{2} = \frac{\text{ح}^{2}}{\text{م}} = \text{ح}^{2} \times \frac{1}{\text{م}} = \text{ح} \times \frac{\text{ح}}{\text{م}}$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$\text{ح} : \text{س} :: \text{س} : \frac{\text{ح}}{\text{م}}$$

فيعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين ح و $\frac{\text{ح}}{\text{م}}$ فلايجاد مقدار الضلع س يرسم نصف محيط دائرة قطره يساوى ضلع المربع المعلوم ح ويقسم هذا القطر الى أقسام متساوية عددها يساوى م ثم يقام من النقطة ص التى هى النهاية المشتركة بين القسم الاول والثانى عمود على القطر ويمد حتى ينتهى الى المحيط ثم يوصل الوتر س ع فيكون س ع ضلع المربع المطلوب

لان $\overline{\text{عح}}^{2} : \overline{\text{عس}}^{2} :: \text{عح} : \text{عص}$

وحيث ان $\text{عح} = \text{عص} \times \text{م}$ يكون

$$\overline{\text{عح}}^{2} : \overline{\text{عس}}^{2} :: \text{عص} \times \text{م} : \text{عص}$$

وبقسمة حدى النسبة الثانية على عص يكون

$$\overline{\text{عح}}^{2} : \overline{\text{عس}}^{2} :: \text{م} : 1$$

او

أو $ح^{٢} : \overline{ع س}^{٢} :: م : ١$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$\overline{ع س}^{٢} = \frac{ح^{٢}}{م}$ وهو المطلوب

فاذا كان المطلوب ايجاد مربع مساحته خمس مساحة مربع معلوم مثل $ح^{٢}$ يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم ح والآخر يساوى خمسه ثم ينشأ على الوسط المتناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

واذا كان المطلوب ايجاد مربع مساحته خمسة أمثال مساحة مربع معلوم مثل $ح^{٢}$ يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم ح والآخر يساوى خمسة امثاله ثم ينشأ على الوسط المتناسب المذكور مربع يكون هو المطلوب

(المثال الخامس)

أن يكون المطلوب انشاء مربع نسبته الى مربع معلوم كنسبة ٣ الى ٥

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق ويجعل وحدة خطية ثم يرسم مستقيم غير متناه مثل هر كما فى (الشكل ١٥٠) من اللوحة ٦ ويؤخذ عليه بعد مثل هو يساوى ثلاثة أمثال الوحدة المذكورة ثم يؤخذ بجانبه بعد مثل ور يساوى خمسة أمثال الوحدة المذكورة ويرسم نصف محيط دائرة قطرها هر ويقام من النقطة و العمود وح على القطر ثم يوصل الوتران حه و حر ويمدان بغير تحديد ثم يؤخذ حى بقدر ضلع المربع المعلوم ويمد من النقطة ى مستقيم مثل ىط يوازى هر فيكون حط مساويا لضلع المربع المطلوب

أعنى أن نسبة المربع المنشا على ح ط الى المربع المعلوم كنسبة الثلاثة

لخمسة

(حل اخر)

ليكن س ضلع المربع المطلوب و ح ضلع المربع المعلوم فعلى منطوق المثال يكون

$$س^٢ : ح^٢ :: ٣ : ٥$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$س^٢ = \frac{٣}{٥} \times ح^٢ = ح \times \frac{٣ح}{٥}$$

ويلزم من هذا أن يكون

$$ح : س :: س : \frac{٣ح}{٥}$$

فيعلم من ذلك أن ضلع المربع المطلوب وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى ثلاثة اخماسه

(الدعوى الخامسة والعشرون العملية)

(شكل ١٢٩ من اللوحة ٥)

اذا علم شكل مستقيم الاضلاع مثل ا ب ح د هـ وكان المطلوب انشاء شكل مشابه له على ضلع معلوم مثل و ر الذى هو نظير الضلع ا ب

فطريقة ذلك أن توصل اقطار الشكل المعلوم وهى اح و اد الخ ثم تنشأ فى النقطة و زاوية مثل ر و ح تساوى الزاوية ب ا ح وتنشأ فى النقطة ر زاوية مثل و ر ح تساوى الزاوية ا ب ح فالمثلث و ر ح الحادث من تلاقى الخطين و ح و ر ح يكون مشابها للمثلث ا ب ح وكذا ينشأ مثلث مثل و ح ط على الضلع و ح الذى هو نظير الضلع ا ح يشابه المثلث ا د ح وينشأ أيضا مثلث مثل و ط ى على الضلع و ط الذى هو نظير الضلع ا د يشابه المثلث ا د هـ فالشكل الحادث و ر ح ط ى يكون هو الشكل المطلوب المشابه لكثير الاضلاع المعلوم ا ب ح د هـ لان هذين الشكلين مركبان من عدد واحد من المثلثات المتشابهة والمتماثلة الوضع

*(الدعوى

(الدعوى السادسة والعشرون العملية)

اذا علم شكلان متشابهان وكان المطلوب انشاء شكل يشابههما ويساوى مجموعهما اوفاضلهما

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ح لمساحة أحد الشكلين وبالحرف ا لاحد اضلاعه وبالحرف ك لمساحة الشكل الآخر وبالحرف ب لضلعه المناظر للضلع ا وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر لكل من الضلعين ا و ب ثم يقال حيث ان نسبة الاشكال المتشابهة الى بعضها كنسبة مربعات اضلاعها المتناظرة الى بعضها يكون

$$ح : ك :: ا^{٢} : ب^{٢}$$

ومن هذه المناسبة ينتج أن

$$ح : ح + ك :: ا^{٢} : ا^{٢} + ب^{٢}$$

وكذا يكون

$$ح : س :: ا^{٢} : ص^{٢}$$

وحيث كان المطلوب أن يكون س = ح + ك ينتج من مقارنة هذه المناسبة بالسابقة أن

$$ص^{٢} = ا^{٢} + ب^{٢}$$

فيعلم من ذلك أن الضلع ص وتر مثلث قائم الزاوية ضلعاه المحيطان بزاويته القائمة هما ا و ب فحينئذ اذا انشئ على الضلع ص شكل مشابه للشكل ح أو للشكل ك يكون هو الشكل المطلوب أى المساوى لمجموعهما

واذا كان المطلوب أن يكون الشكل س مساويا لفاضل الشكلين المعلومين ح و ك أى س = ح − ك يقال حيث ان

ح : ك :: ا^{2} : ب^{2} يلزم أن يكون

ح : ح − ك :: ا^{2} : ا^{2} − ب^{2} وكذا يكون

ح : س :: ا^{2} : ص^{2}

فينتج من مقارنة هاتين التناسبتين أن

ص^{2} = ا^{2} − ب^{2}

ويعلم من ذلك أن الضلع ص هو ضلع من مثلث قائم الزاوية وتره ا وضلعه الآخر ب وانه اذا انشئ على الضلع ص شكل مشابه للشكل ح أو للشكل ك يكون هو الشكل المطلوب أى المساوى لفاضلهما

(الدعوى السابعة والعشرون العملية)

اذا كان المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما وتكون نسبته اليه كنسبة مقدار معين مثل م الى مقدار آخر كذلك مثل ن

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف ا لاحد اضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المسئلة يكون

س : ح :: م : ن

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

س : ح :: ص^{2} : ا^{2}

فينتج من هاتين التناسبتين أن

ص^{2} : ا^{2} :: م : ن

فحينئذ يتعين الضلع ص بالطريقة المقررة في الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون هو المطلوب

(امثلة)

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته ربع مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوى نصف أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ومساحته تسعة أمثال مساحة الشكل المعلوم

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد يساوى ثلاثة أمثال أحد اضلاع الشكل المعلوم ويعتبران ضلعين متناظرين ثم ينشأ على هذا البعد شكل يشابه الشكل المعلوم فيكون هو الشكل المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما ونسبة مساحته الى مساحة الشكل المعلوم كنسبة الثلاثة الى السبعة

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ح لمساحة الشكل المعلوم وبالحرف ا لاحد اضلاعه وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا فعلى منطوق المثال يكون

س : ح :: ٣ : ٧

وحيث ان هذين الشكلين متشابهان يكون

$س : ح :: ص^٢ : ا^٢$

فينتج من هاتين المتناسبتين أن

$ص^٢ : ا^٢ :: ٣ : ٧$

فحينئذ يتعين الضلع ص كما في المثال الخامس من الدعوى الرابعة والعشرين العملية وبعد تعيينه ينشأ عليه شكل مشابه للشكل المعلوم ح فيكون هو الشكل المطلوب

(الدعوى الثامنة والعشرون العملية)

(شكل ١٥١ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب انشاء شكل يشابه شكلا معلوما مثل الشكل ك ويكافئ شكلا آخر معلوما كذلك مثل الشكل ل

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ا لاحد أضلاع الشكل ك وبالحرف س لمساحة الشكل المطلوب وبالحرف ص لضلعه المناظر للضلع ا ثم يقال حيث كان المطلوب أن يكون الشكل س مشابها للشكل ك يلزم أن يكون

ك : س :: ا^2 : ص^2

وحيث كان المطلوب أيضا أن يكون الشكل س مكافئا للشكل ل يلزم أن يكون

ك : ل :: ا^2 : ص^2

فحينئذ اذا بحث عن المربع م^2 المكافئ للشكل ك وعن المربع ن^2 المكافئ للشكل ل يكون

م^2 : ن^2 :: ا^2 : ص^2

ومن هذه المناسبة ينتج أن

م : ن :: ا : ص

فيعلم من هذه المناسبة أن الضلع ص رابع متناسب مع الخطوط الثلاثة م و ن و ا ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي

أن يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك وعن ضلع المربع المكافئ

للشكل

للشكل ل ثم يبحث عن الرابع المتناسب مع هذه الخطوط الثلاثة وينشا عليه شكل مشابه للشكل ك فيكون هو الشكل المطلوب

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شبه منحرف معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشا عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم يبحث عن ضلع المربع المكافئ للشكل ك ويرمز له بالحرف م وعن ضلع المربع المكافئ للشكل ل ويرمز له بالحرف ن وعن الرابع المتناسب مع الخطوط الثلاثة م و ن و ا ثم ينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع فيكون هو المثلث المطلوب أى المكافئ لشبه المنحرف المعلوم

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلا متوازى الاضلاع معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشا عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ مثلثا مختلف الاضلاع معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك أن يرسم مستقيم كيف اتفق مثل ا وينشأ عليه مثلث متساوى الاضلاع يرمز له بالحرف ك ثم تتم العملية كما فى المثال الاول

(المثال الرابع)

أن يكون المطلوب انشاء مثلث متساوى الاضلاع يكافئ شكلا مخمسا معلوما رمزه ل

فطريقة ذلك أن يحوّل المخمس الى مثلث يكافئه ثم يحول هذا المثلث الى مثلث متساوى الاضلاع فيكون هو المطلوب

تمت المقالة الثالثة على يد جامعه المتوكل على ربه المعيد المبدى
على عزت أفندى أحد خوجات العلوم الطبيعية
والرياضية بمدرسة المهندسخانة الخديوية
ووكيل المدرسة التجهيزية
والمدرسة الابتدائية

(دروس فى المقالة الرابعة)

المقالة الرابعة يبحث فيها عن خواص الاشكال المستقيمة الاضلاع المنتظمة ومساحة الدائرة

(تعريف)

الشكل المنتظم ما تساوت زواياه واضلاعه فكل شكل مستقيم الاضلاع يكون منتظما اذا تساوت زواياه واضلاعه سواء كان مثلثا أو شكلا رباعيا أو مخمسا أو مسدسا أو غير ذلك

(الدعوى الاولى النظرية)

(شكل ١٠٥ من اللوحة ٦)

كل شكلين منتظمين متحدين فى عدد الاضلاع يكونان متشابهين

فاذا كان الشكل ا ب ح د هـ و مسدسا منتظما و ر ح ط ى ك ل مسدسا آخر كذلك كان مجموع الزوايا المحيطية فى الشكل الاول مساويا ثمانى قوائم كما تقرر ذلك فى النظرية التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى ومجموع الزوايا المحيطية فى الشكل الثانى يساوى ثمانى قوائم و يلزم من هذا أن تكون الزاوية ا = سدس الثمان قوائم والزاوية ر = سدس الثمان قوائم فاذن تكون الزاوية ا = للزاوية ر والزاوية ب = ح والزاوية ح = ط وهكذا

و يلزم من كون الشكل الاول منتظما أن يكون

ا ب = ب ح = ح د = د هـ = هـ و = و ا

وكذا يلزم من كون الشكل الثانى منتظما أن يكون

ر ح = ح ط = ط ى = ى ك = ك ل = ل ر

و يلزم من هذا أن يكون

ا ب : ر ح :: ب ح : ح ط :: ح د : ط ى :: د هـ : ى ك الخ

فاذن يكون الشكل ا ب ح د هـ و مشابها للشكل ر ح ط ى ك ل

كما تقرر ذلك فى النظرية السابعة والعشرين من المقالة الثالثة

(نتيجة)

النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المنتظمين المتحدين فى عدد الاضلاع كالنسبة بين ضلعين متناظرين والنسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى ضلعين متناظرين لان الشكلين اللذين بهذه المثابة متشابهان وقد تقرر فى النظرية الثامنة والعشرين من المقالة الثالثة أن النسبة بين محيطى كثيرى الاضلاع المتشابهين كالنسبة بين ضلعين متناظرين وأن النسبة بين سطحيهما كالنسبة بين مربعى ضلعين متناظرين

(تنبيه)

يتعين مقدار زاوية أى شكل منتظم عدد اضلاعه معين بتقسيم مجموع زواياه على عدد اضلاعه كما يتعين مقدار زاوية أى شكل متساوى الزوايا عدد اضلاعه معين انظر الدعوى التاسعة والثلاثين من المقالة الاولى

(الدعوى الثانية النظرية)

(شكل ١٥٦ من اللوحة ٦)

كل شكل منتظم يمكن رسمه فى الدائرة ورسم دائرة فيه

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن ا ب ح ء ه الخ شكلا منتظما فلو تصور مرور محيط دائرة بالنقط الثلاث ا و ب و ح وكان مركزه ط وانزل العمود ط ى على ب ح ووصل ط ا و ط ء لكان الشكل الرباعى ط ى ح ء مساويا للشكل الرباعى ط ى ب ا لانه لو جعل الضلع ط ى فصلا مشتركا وطبق الشكل ط ى ح ء على الشكل ط ى ب ا لانطبقت الزاوية القائمة ح ى ط على القائمة ب ى ط ووقعت النقطة ح على النقطة ب ويلزم من كون الشكل ا ب ح ء ه ور ح منتظما أن تكون الزاوية ء ح ب = ا ب ح وأن يقع الضلع ح ء على استقامة الضلع ب ا وحيث أن ح ء = ب ا تقع النقطة ء فى ا ويتحد الشكلان الرباعيان فحينئذ يكون البعد ط ء

مساويا

مساو بالبعد ط ا ويلزم من هذا أن تكون النقطة ء على المحيط الذى يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح وبمثل هذا يبرهن على ان المحيط الذى يمر بالرؤس الثلاث ب و ح و ء يمر أيضا بالرأس التالية لها وهى هـ وهكذا

فقد ثبت بهذا ان المحيط الذى يمر بالنقط الثلاث ا و ب و ح يمر بجميع رؤس زوايا الشكل المنتظم المفروض وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الاضلاع اب و بح و حء الخ اوتارا متساوية تكون ابعادها عن المركز متساوية كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية فحينئذ اذا رسم محيط دائرة نصف قطره طب ومركزه ط كان ذلك المحيط مماسا للضلع بح فى وسطه وفى اواسط سائر اضلاع الشكل المنتظم المفروض

(تنبيه)

اعلم ان النقطة ط التى هى المركز المشترك للدائرة المرسومة داخل الشكل المنتظم وللدائرة المرسومة خارجه يمكن ان تعتبر أيضا مركزا للشكل المذكور وحينئذ يقال للزاوية التى مثل اطب أى المنحصرة بين نصفى قطرين واصلين الى نهايتى ضلع واحد مثل اب زاوية مركزية

وحيث ان جميع الاوتار اب و بح الخ متساوية يعلم من ذلك أن الزوايا المركزية متساوية وحينئذ يتعين مقدار كل من تلك الزوايا بقسمة مجموع الاربع زوايا القائمة على عدد اضلاع الشكل

(الدعوى الثالثة النظرية)

(شكل ٢٣ من اللوحة ١٧)

كثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الاضلاع كان متساوى الزوايا

وكثير الاضلاع المرسوم داخل الدائرة اذا كان متساوى الزوايا كانت اضلاعه متساوية مثنى

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية ا معيارها $\frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ا ف}}{٢}$ والزاوية ب معيارها $\frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ب ح}}{٢}$ والقوس ب ح = القوس ا ف تكون الزاوية ا مساوية للزاوية ب وبمثل هذا يبرهن على تساوى الزوايا الاخر

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كانت الزاوية ا = ب = ح = ... ف يكون أضلاع ا ف = ب ح = ء هـ و ا ب = ح ء = هـ ف لان الزاوية ا معيارها $\frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ا ف}}{٢}$ والزاوية ب معيارها $\frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ب ح}}{٢}$ لكن حيث كانت الزاوية ا مساوية للزاوية ب بالفرض يلزم أن يكون $\frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ا ف}}{٢} = \frac{\text{المحيط} - \text{القوس ا ب} - \text{القوس ب ح}}{٢}$

ويلزم من هذا أن يكون القوس ا ف = للقوس ب ح وبمثل هذا يبرهن على ان القوس ا ب يساوى القوس ح ء وان القوس ب ح يساوى القوس ء هـ وهكذا ويلزم من هذا أن تكون الاضلاع متساوية مثنى

(تنبيه)

اعلم ان الضلع الاول = الضلع الثالث و = الخامس و = السابع و يساوى التاسع وهكذا وان الضلع الثانى = الضلع الرابع ويساوى السادس و = الثامن وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فرديا بان كان تسعة مثلا كان الضلع الاول هو الفارق بين الضلع التاسع والضلع

الثانى

الثانى وكانت جميع اضلاع الشكل متساوية

(الدعوى الرابعة النظرية)

(شكل ٢٤ من اللوحة ١٧)

كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوى الزوايا كان متساوى الاضلاع

وكثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوى الاضلاع كانت زواياه متساوية مثنى

(برهان القضية الاولى) أن يقال حيث ان الزاوية ا = ب = و = ٠٠٠ = ف يكون الضلع اب منصفا فى نقطة التماس ب لانه لو وصل نصفا القطرين ح ا و ح ب لكانت الزاوية اب ح = للزاوية ب ب ح اقيامهما وحيث ان الزاوية ف ا ب = للزاوية ٣ ب ح بالفرض تكون الزاوية ح ا ب = للزاوية ح ب ب ويلزم من هذا أن تكون الزاوية الثالثة ب ح ا = للزاوية ب ح ب وحيث لن الضلع ح ب مشترك فى المثلثين ح ب ا و ح ب ب يكون المثلث ح ب ا = للمثلث ح ب ب كما تقرر ذلك فى النظرية السابعة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن يكون الضلع ا ب مساويا للضلع ب ب وبمثل هذا يبرهن على أن الضلع ب ك = ح ك والضلع ح ل = ى ل أى يبرهن على أن كل ضلع منصف فى نقطة التماس وحيث ان المماس ب ب = المماس ب ك يكون ا ب = ب ح وبمثل هذا يبرهن على أن جميع الاضلاع متساوية وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث كان الضلع ا ب = ب ح = ح ى = ٠٠٠٠٠ = ف ا وأيضا ب ب = ب ك ينتج من ذلك أن الضلع اب = ح ك وحيث ان الزاوية اب ح = ح ك ح أقيامهما والضلع ح ب = ح ك لان كلاهما نصف قطر دائرة بعينها يلزم أن يكون المثلث ا ح ب مساويا للمثلث ح ح ك كما تقرر

ذلك فى النظرية السادسة من المقالة الاولى ويلزم من تساوى هذين المثلثين أن تكون الزاوية حاے = للزاوية حدك وأن تكون الزاوية ا التى هى ضعف الزاوية حاے مساوية للزاوية د التى هى ضعف الزاوية حدك وبمثل هذا يبرهن على أن الزاوية ب = ى وهكذا الى آخره بمعنى أن الزوايا متساوية مثنى

(تنبيه)

اعلم أن الزاوية الاولى = الثالثة و = الخامسة و = السابعة وهكذا وأن الزاوية الثانية = الرابعة و = السادسة و = الثامنة وهكذا فاذا كان عدد اضلاع الشكل فردا بان كان سبعة مثلا كانت الزاوية الاولى هى الفارقة بين السابعة والثانية وكانت زوايا الشكل كلها متساوية

(الدعوى الخامسة العملية)

(شكل ١٥٧ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب رسم مربع داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يرسم قطران متعامدان مثل اح و ب ى ويوصل اب و بح و حى و ىا فيكون الشكل الحادث ابحى هو المربع المطلوب

لانه يلزم من تساوى الزوايا المركزية اهب و بهح و حهى و ىها أن تكون الاقواس اب و بح و حى و ىا متساوية ويلزم من هذا أن تكون الاوتار اب و بح و حى و ىا متساوية ويلزم من كون كل من الزوايا ا و ب و ح و ى محيطية ومرسومة فى نصف الدائرة أن تكون كل واحدة منها قائمة فقد ثبت بهذا أن الشكل ابحى مربع وهو المطلوب

(تنبيه)

حيث ان المثلث بهح قائم الزاوية ومتساوى الساقين يكون

$$ب ح : ب هـ :: \sqrt{٢} : ١$$

كما تقرر ذلك فى النظرية العاشرة من المقالة الثالثة فيعلم من ذلك أن نسبة ضلع المربع المرسوم داخل الدائرة الى نصف القطر كنسبة جذر الاثنين للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المربع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب مقدار نصف قطر الدائرة فى جذر الاثنين فحاصل الضرب يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال يضرب ثلاث أذرع فى جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مربع مقدار ضلعه خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يقسم مقدار ضلع المربع المعلوم على جذر الاثنين فخارج القسمة يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال يقسم خمس اذرع على جذر الاثنين فيحصل المطلوب

(الدعوى السادسة العملية)

(شكل ١٥٨ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب رسم مسدس منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يقال ليفرض أن المسئلة محلولة وان ا ب هو أحد اضلاع المسدس المنتظم المطلوب فلو وصل نصفا القطرين ا ط و ب ط لكان المثلث الحادث ا ط ب متساوى الاضلاع لان الزاوية ا ط ب = $\frac{\text{اربع قوائم}}{٦}$ فاذا جعلت الزاوية القائمة وحدة كانت الزاوية ا ط ب = $\frac{٤}{٦}$ = $\frac{٢}{٣}$

ويلزم من هذا أن يكون مجموع الزاويتين ا ـ ط و ـ ا ط = ٢ ـ $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٤}{٣}$ وحيث ان الزاوية ا ـ ط = ـ ا ط تكون الزاوية ا ـ ط = $\frac{٢}{٣}$ والزاوية ـ ا ط = $\frac{٢}{٣}$ فاذن يكون المثلث ا ـ ط متساوى الاضلاع لان زواياه الثلاث متساوية فقد ثبت بهذا ان ضلع المسدس المنتظم المرسوم داخل الدائرة مساو لنصف القطر ومن هنا تنتج طريقة رسمية هي ان تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر نصف القطر ويركز في أى نقطة من المحيط ويوضع الطرف الثانى من البيكار على المحيط فينفصل من المحيط سدسه ثم ينقل البيكار لينفصل السدس الثانى من المحيط وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء ثم توصل أوتار تلك الاقواس فيحدث المسدس المنتظم المطلوب

(تنبيهان)

الاول اذا وصلت خطوط مستقيمة بين كل رأسين من رؤس زوايا المسدس المنتظم ا ـ ح د هـ و يكون المثلث الحادث ا ح هـ متساوى الاضلاع الثانى حيث كان ا ـ = ـ ح = ح ط = ا ط يكون الشكل ا ـ ح ط المتوازى الاضلاع معينا وقد تقرر فى نتيجة النظرية الرابعة عشر من المقالة الثالثة أن مجموع مربعات الاضلاع الاربعة من أى شكل متوازى الاضلاع مساو مجموع مربعى قطريه فاذن يكون

$$\overline{\text{ا ح}}^2 + \overline{\text{ـ ط}}^2 = \overline{\text{ا ـ}}^2 + \overline{\text{ـ ح}}^2 + \overline{\text{ح ط}}^2 + \overline{\text{ط ا}}^2 = ٤\ \overline{\text{ا ـ}}^2$$

$$\text{أو} = ٤\ \overline{\text{ـ ط}}^2$$

فاذا طرح من كل من هاتين المتساويتين $\overline{\text{ـ ط}}^2$ يكون

$$\overline{\text{ا ح}}^2 = ٣\ \overline{\text{ـ ط}}^2$$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$\overline{\text{ا ح}}^2 : \overline{\text{ـ ط}}^2 :: ٣ : ١$$ أو

$$\text{ا ح} : \text{ـ ط} :: \sqrt{٣} : ١$$

أعنى أن نسبة ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل الدائرة الى

نصف

نصف القطر كنسبة جذر الثلاثة للواحد

(مثالان)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار ضلع المثلث المتساوى الاضلاع المرسوم داخل دائرة نصف قطرها ثلاث أذرع

فطريقة ذلك أن يضرب نصف القطر فى جذر الثلاثة فحاصل الضرب يكون هو المقدار المطلوب ففى هذا المثال تضرب ثلاث أذرع فى جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب معرفة مقدار نصف قطر الدائرة المرسوم داخلها مثلث متساوى الاضلاع مقدار ضلعه خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يقسم مقدار الضلع المعلوم على جذر الثلاثة فخارج القسمة يكون المقدار المطلوب ففى هذا المثال تقسم خمس أذرع على جذر الثلاثة فيحصل المطلوب

(الدعوى السابعة العملية)

(شكل ١٥٩ من اللوحة ٦)

اذا كان المطلوب رسم معشر منتظم داخل دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يقال ليفرض أن المسئلة محلولة وأن ا ب هو أحد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب فلو وصل نصفا القطر ين ا ع و ع ب لكان المثلث الحادث ا ع ب متساوى الساقين و يلزم من هذا أن تكون الزاوية ع ا ب مساوية للزاوية ع ب ا وحيث فرض أن ا ب هو أحد اضلاع المعشر المنتظم المطلوب يكون القوس ا ب عشر المحيط وتكون الزاوية ا ع ب عشر الاربع قوائم أو خمس القائمتين و يلزم من هذا أن يكون مجموع زوايا المثلث ا ع ب قدر الزاوية ا ع ب خمس مرات و يلزم من هذا أن تكون الزاوية ع ا ب ضعف الزاوية ع والزاوية ع ب ا

ضعف الزاوية ع فلو نصفت الزاوية ع ـا بمستقيم مثل ـم لحدث

ام : م ع :: ا ـ : ـ ع أو :: ا ـ : ا ع

كما تقرر ذلك فى النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة

وحيث ان الزاوية م ـ ع نصف الزاوية ا ـ ع تكون الزاوية م ـ ع مساوية للزاوية ع ويكون الضلع م ع مساويا للضلع م ـ فلو وضع م ـ بدل م ع فى المتناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : م ـ :: ا ـ : ا ع

ويلزم من كون المثلث م ع ـ متساوى الساقين أن تكون الزاوية الخارجة عنه وهى ام ـ ضعف الزاوية ع وحيث ان الزاوية م ا ـ ضعف الزاوية ع كذلك تكون الزاوية ا م ـ مساوية للزاوية م ا ـ ويلزم من هذا أن يكون المثلث ا م ـ متساوى الساقين أى أن يكون م ـ = ا ـ فلو وضع ا ـ بدل مساويه م ـ فى المتناسبة السابقة لصارت هكذا

ام : ا ـ :: ا ـ : ا ع

فيعلم من هذه المتناسبة أن ضلع المعشر المنتظم المطلوب وسط متناسب بين نصف القطر والجزء الاصغر ام ومن هنا تنتج طريقة رسمية هى

أن يقسم نصف القطر ا ع الى قسمين ام و م ع بحيث يكون القسم الاكبر وهو م ع وسطا متناسبا بين نصف القطر ا ع وجزئه الاصغر ام ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر القسم الاكبر المذكور ويركز فى أى نقطة من محيط الدائرة ويوضع الطرف الثانى من البيكار فى نقطة أخرى من المحيط وينقل البيكار مرة ثانية وثالثة وهكذا حتى يرجع الى نقطة الابتداء فينقسم المحيط الى عشرة اقواس متساوية ثم توصل أوتار تلك الاقواس فيتشكل المعشر المنتظم المطلوب

•(النتيجة الاولى)•

اذا كان المطلوب رسم مخمس منتظم داخل الدائرة

فطريقة

فطريقة ذلك أن يقسم المحيط الى عشرة أقواس متساوية ثم توصل اوتار الاقواس التي كل قوس منها يساوى ضعف عشر المحيط فيتشكل المخمس المنتظم المطلوب

(النتيجة الثانية)

اذا كان المطلوب رسم الخمس عشرى المنتظم داخل الدائرة

فطريقة ذلك أن يطرح قوس يساوى عشر المحيط من قوس يساوى سدسه فيبقى قوس يساوى جزأ من خمسة عشر من المحيط ثم تؤخذ فتحة بالبيكار بقدر هذا الجزء وتوضع على المحيط مرة بعد أخرى حتى يرجع الى نقطة الابتداء فيتشكل الخمس عشرى المنتظم المطلوب

لان $\frac{١}{٦} - \frac{١}{١٠} = \frac{١٠ - ٦}{٦٠} = \frac{٤}{٦٠} = \frac{٢}{٣٠} = \frac{١}{١٥}$

(تنبيه)

اذا رسم مضلع داخل الدائرة ونصفت الاقواس المقابلة لاضلاعه ووصلت اوتار أنصاف هذه الاقواس يتشكل مضلع عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الاول فان كان المضلع الاول منتظما كان المضلع الحادث كذلك فلذا يستعمل المربع لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا للعدد ٢ مثل ٨ و ١٦ و ٣٢ و ٦٤ و ١٢٨ الخ

ويستعمل المسدس المنتظم لانشاء المضلعات المنتظمة التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ٦ و ٢ مثل ١٢ و ٢٤ و ٤٨ و ٩٦ و ١٩٢ الخ

ويستعمل المعشر لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ١٠ و ٢ مثل ٢٠ و ٤٠ و ٨٠ و ١٦٠ و ٣٢٠ الخ

ويستعمل الخمس عشرى لانشاء المضلعات التي يكون عدد اضلاعها مضاعفا لكل من العددين ١٥ و ٢ مثل ٣٠ و ٦٠ و ١٢٠ و ٢٤٠ و ٤٨٠ الخ

وطالما اعتقد المتقدمون أن هذه المضلعات المنتظمة هى التى يمكن رسمها داخل الدائرة بواسطة طرق الهندسة الاصلية او بها او بواسطة حل المعادلات الجبرية ذوات الدرجة الاولى والثانية الى أن ظهر المعلم غوس النمساوى وبرهن فى كتابه الذى طبع فى ناحية ساقسونيا سنة ألف وثمانمائة وواحدة من تاريخ الميلاد انه يمكن بواسطة طرق مشابهة للطرق التى ذكرت أن يرسم داخل الدائرة مضلع منتظم عدد اضلاعه سبعة عشر ضلعا بل يمكن أيضا أن يرسم أى مضلع منتظم عدد اضلاعه ٢^ن + ١ بشرط أن يكون ٢^ن + ١ عددا اوليا

(الدعوى الثامنة العملية)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

اذا علم مضلع منتظم مرسوم داخل دائرة وكان المطلوب أن يرسم على هذه الدائرة مضلع مشابه له

فطريقة ذلك أن تنصف الاقواس اب و بح و حد الخ بنقط مثل م و ن و ص الخ ثم يمد من تلك النقط خطوط مستقيمة مماسة لمحيط الدائرة مثل رح و حط و طى الخ فيحدث من تلاقى هذه الخطوط مضلع منتظم مشابه للمضلع المعلوم ابحدهو وتكون كل ثلاث نقط مثل ن و ب و ح على مستقيم واحد لانه حيث كانت اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة موازية لنظائرها من المضلع المرسوم داخل الدائرة تكون كل زاوية من زوايا المضلع الخارج مساوية لنظيرتها من المضلع الداخل وحيث كانت زوايا المضلع الداخل متساوية تكون زوايا المضلع الخارج كذلك وقد تقرر فى النظرية الرابعة أن كثير الاضلاع المرسوم على الدائرة ان كان متساوى الزوايا كان متساوى الاضلاع فقد ثبت بهذا أن المضلع سرحطى الخ منتظم وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

اذا علم مضلع منتظم مرسوم على دائرة وكان المطلوب أن يرسم داخل هذه

الدائرة

الدائرة مضلع منتظم مشابه له

فطريقة ذلك أن يوصل من المركز الى رؤس زوايا الشكل المعلوم خطوط مستقيمة مثل ں ر و ں ح و ں ط الخ فهذه الخطوط تقطع محيط الدائرة فى نقط مثل ا و ب و ح الخ فاذا وصلت الاوتار ا ب و ب ح و ح د الخ حدث مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

أو توصل أوتار بين نقط تماس المحيط باضلاع المضلع الخارج فيحدث أيضا مضلع داخل الدائرة مشابه للمضلع المعلوم المرسوم خارجها

(النتيجة الثانية)

يمكن أن يرسم على الدائرة جميع الاشكال المنتظمة التى علمت كيفية رسمها فى هذه الدائرة وبالعكس

(الدعوى التاسعة النظرية)

(شكل ١٦٠ من اللوحة ٦)

كل مضلع منتظم مساحته تساوى حاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله

(برهانها) أن يقال ليكن رح ط ى الخ مضلعا منتظما فمساحة المثلث رں ح تساوى رح × $\frac{1}{2}$ ں م ومساحة المثلث ں ح ط تساوى ط ح × $\frac{1}{2}$ ں ى وحيث ان ں ى = ں م تكون مساحة مجموع المثلثين هكذا

(ر ح + ح ط) × $\frac{1}{2}$ ں م فاذا أخذت مساحة جميع المثلثات المشتمل عليها المضلع يشاهد أن مساحة المضلع المذكور تساوى حاصل ضرب محيطه فى $\frac{1}{2}$ ں م أى فى ربع القطر وهو المطلوب

(تنبيه)

اعلم أن الخط ں م الذى هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخل المضلع هو عين العمود النازل من المركز على أحد أضلاعه

(الدعوى العاشرة النظرية)

(شكل ١٦١ من اللوحة ٦)

نسبة محيطات المضلعات المنتظمة المتحدة فى عدد الاضلاع الى بعضها كنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة داخلها وكنسبة أنصاف أقطار الدوائر المرسومة خارجها ونسبة سطوح المضلعات المذكورة الى بعضها كنسبة مربعات أنصاف الاقطار المذكورة

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن اب أحد أضلاع مضلع منتظم مركزه هـ فيكون اهـ هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود هد المنزل على اب هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله وليكن أيضا رح أحد أضلاع المضلع المنتظم الآخر و النقطة ط مركزه فيكون طر هو نصف قطر الدائرة المرسومة عليه ويكون العمود طى المنزل على رح هو نصف قطر الدائرة المرسومة داخله فحيث ان الزاوية ا نصف زاوية المضلع الاول والزاوية ر نصف زاوية المضلع الثانى تكون الزاوية ا مساوية للزاوية ر وأيضا تكون الزاوية ب مساوية للزاوية ح ويلزم من هذا أن يكون المثلث ابهـ مشابها للمثلث رحط وكذا يلزم أن يكون المثلث اهد مشابها للمثلث رىط ويلزم من هذا أن يكون

اب : رح :: اهـ : رط :: دهـ : ىط

وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان

اب : رح :: اهـ : رط :: دهـ : ىط

وان المقادير المتناسبة مربعاتها متناسبة كما تقرر فى علم الحساب فيكون

$\overline{اب}^2 : \overline{رح}^2 :: \overline{اهـ}^2 : \overline{رط}^2 :: \overline{دهـ}^2 : \overline{ىط}^2$

وحيث ان نسبة المضلعين المذكورين الى بعضهما كنسبة مربعى ضلعين متناظرين يكون

المضلع

المنلع الاول : المضلع الثانى :: اب^٢ : دح^٢ :: اه^٢ : رط^٢ :: ده^٢ : بط^٢
وهو المطلوب

(الدعوى الحادية عشر الفائدة)

(شكل ١٦٢ الثانى)

الخط المحدب المحاط أصغر من كل خط محيط به

ونعنى بالخط المحدب الخط المنحنى أو المنكسر أو المركب منهما الذى لا يقطعه المستقيم الا فى نقطتين

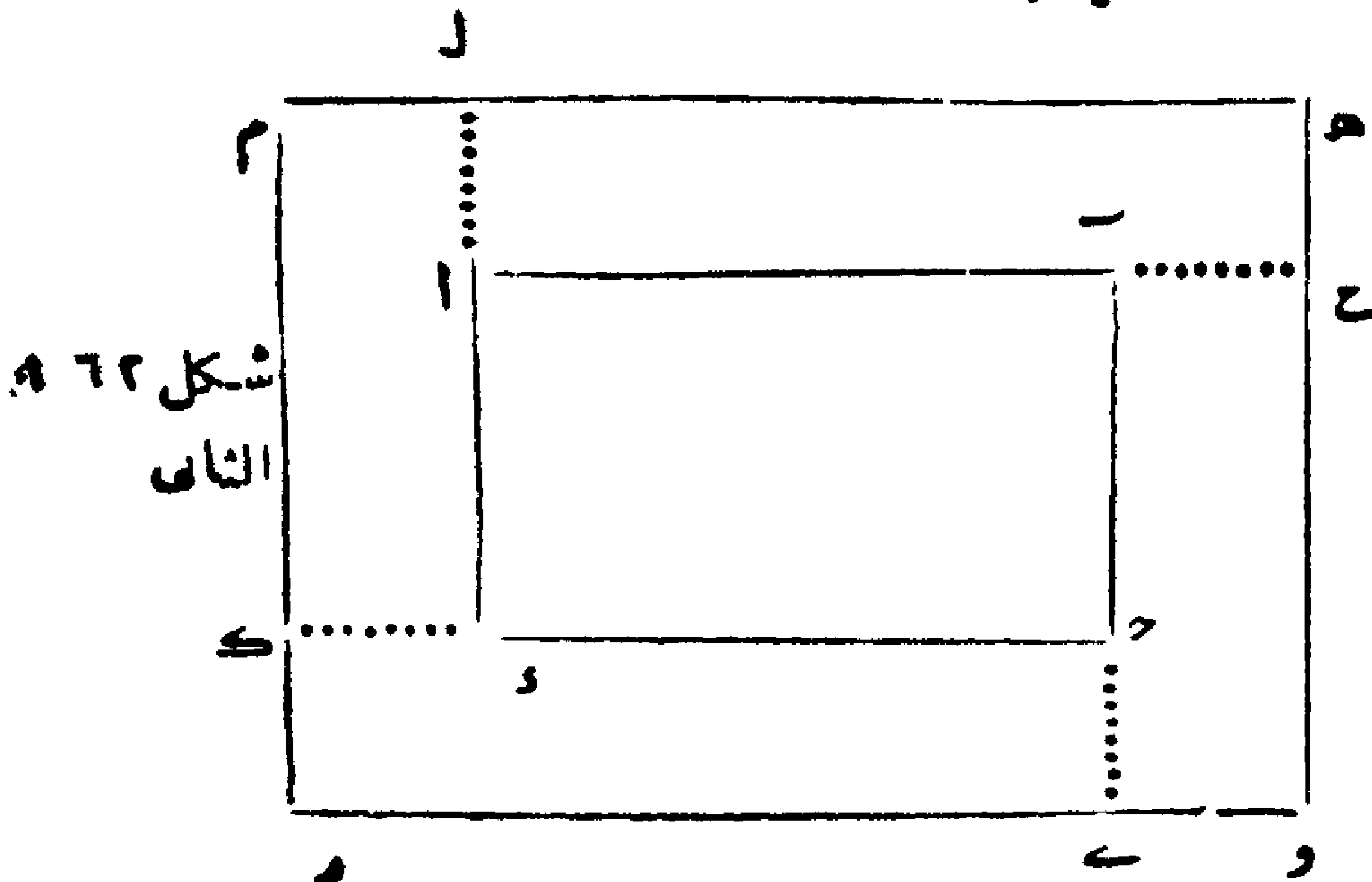
(برهانها) أن يقال ليكن ابحد خطا منكسرا محدبا و هورم خطا آخر محيطا بالخط المحدب ابحد فلو مددت الاضلاع اب و بح و حد و دا فى جهة واحدة حتى قطعت الخط المحيط لحدثت هذه المتباينات

اب + بع < ال + له + هع و
بح + حع < بع + عو + وب و
حد + دك < حب + بر + رك و
دا + ال < دك + كم + مل

فلو جمعت هذه المتباينات طرفا لطرف وحذفت الاجزاء المشتركة من كل من الطرفين لحدث

اب + بح + حد + دا < هو + ور + رم + مه

وبمثل هذا يبرهن على أن كل خط محدب كائنا ما كان عدد أضلاعه فهو دائما أصغر من أى خط محيط به وهو المطلوب



شكل ١٦٢ الثانى

(الدعوى الثانية عشر النظرية)
(شكل ١٦٤ من اللوحة ٧)*

كل دائرتين متحدتي المركز يمكن دائماً أن يرسم داخل كبراهما مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الصغرى وأن يرسم على محيط الصغرى مضلع منتظم أضلاعه لا تقطع محيط الكبرى

(برهان القضية الاولى) أن يقال ليكن ح ا نصف قطر الدائرة الصغرى و ح ب نصف قطر الكبرى فلو رسم مستقيم مثل ء هـ مماس لمحيط الصغرى في النقطة ا ومدّ على استقامته حتى انتهى الى محيط الكبرى في نقطتين مثل ء و هـ ورسم داخل الدائرة الكبرى مضلع منتظم من المضلعات المنتظمة الممكن رسمها داخل الدائرة بواسطة العمليات المتقدمة ونصفت الاقواس الموترة باضلاعه ووصلت أوتار أنصاف هذه الاقواس لتشكل مضلع منتظم عدد أضلاعه ضعف عدد أضلاع الاول فلو دووم على تنصيف هذه الاقواس لتحصل قوس مثل م ب ق أصغر من القوس ء ب هـ فلو فرض أن النقطة ب هي وسط القوس م ب ق لظهر أن الوتر م ق أبعد من المركز عن الوتر ء هـ وأن المضلع المنتظم الذي أحد أضلاعه م ق لا يقطع محيط الدائرة التي نصف قطرها ح ا وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال لو وصل ح م و ح ق اللذان يقطعان المماس ء هـ في ك و ل لكان ك ل هو أحد أضلاع المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الصغرى المشابه للمضلع المرسوم داخل الدائرة الكبرى الذي ضلعه م ق

وحيث ان الخط ح ك أصغر من الخط ح م يظهر أن المضلع المرسوم على الدائرة الصغرى الذي ضلعه ك ل لا يقطع محيط الدائرة الكبرى فيعلم من ذلك انه يمكن بواسطة العمل المتقدم أن يرسم مضلع منتظم داخل الدائرة الكبرى وأن يرسم مضلع مشابه له على محيط الدائرة الصغرى بحيث تكون أضلاعهما محصورة بين محيطي الدائرتين

(تنبيه)

(تنبيه)

يمكن أن يرسم جزء من مضلع منتظم داخل أكبر القطعين ور و طح وأن يرسم جزء آخر مشابه له على القطع الاصغر بحيث تكون اطراف المضلعين محصورة بين المحيطين ويكفي لعمل ذلك أن يقسم القوس ور الى قسمين متساويين ثم الى أربعة أقسام متساوية ثم الى ثمانية أقسام متساوية وهكذا حتى يحصل جزء أصغر من القوس د ـ هـ

و يطلق قسم المضلع المنتظم هنا على الشكل المحدود بجملة أوتار متساوية مرسومة فى القوس ور من أحد طرفيه الى الآخر وهذا القسم وان وجدت فيه خواص المضلع المنتظم وهى تساوى الاضلاع والزوايا وامكان رسمه فى الدائرة ورسم الدائرة فيه الا انه لا يكون جزأ من مضلع منتظم الا اذا كان القوس الموتر باحد اضلاعه جزأ ممتدا خلافى المحيط أعنى الا اذا اشتمل محيط الدائرة على قوسه مرارا صحيحة بدون باق •

(الدعوى الثالثة عشر النظرية)

نسبة محيطى الدائرتين الى بعضهما كنسبة نصفى قطريهما

ونسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى قطريهما

(برهانها) أن يقال لو رسم فى الدائرتين مضلعان منتظمان متشابهان للزم أن تكون نسبة محيطى هذين المضلعين الى بعضهما كنسبة نصفى قطرى الدائرتين المرسومتين على المضلعين المذكورين وأن تكون نسبة سطحى هذين المضلعين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى القطرين المذكورين كما تقرر ذلك فى النظرية العاشرة وحيث انه يمكن اعتبار الدائرة مضلعا منتظما لاحصر لعدد أضلاعه ينتج من ذلك أن نسبة محيطى الدائرتين الى بعضهما كنسبة نصفى قطريهما وأن نسبة الدائرتين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى قطريهما وهو المطلوب

(تعاريف)

الاقواس المتشابهة والقطع المتشابهة والقطوع المتشابهة هى التى تقابل

الزوايا المركزية المتساوية

(الدعوى الرابعة عشر النظرية)

(شكل ١٦٦ من اللوحة ٧)

نسبة القوسين المتشابهين الى بعضهما كنسبة نصفى قطريهما ونسبة القطعين المتشابهين الى بعضهما كنسبة مربعى نصفى قطريهما

(برهان القضية الاولى) أن يقال لتمكن الزاوية ح مساوية للزاوية ط فيكون

القوس ـا : المحيط اح :: الزاوية ح : ٤ قوائم

وكذا يكون

القوس ده : المحيط طد :: الزاوية ط : ٤ قوائم

ويلزم من هذا أن يكون

القوس ـا : القوس ده :: المحيط اح : المحيط طد

وحيث ان المحيط اح : المحيط طد :: اح : طد يكون

القوس ـا : القوس ده :: اح : طد وهو المطلوب

(وبرهان القضية الثانية) أن يقال حيث ان

القطع احـ : الدائرة اح :: الزاوية ح : ٤ قوائم و

القطع دطه : الدائرة دط :: الزاوية ط : ٤ قوائم يكون

القطع احـ : القطع دطه :: الدائرة اح : الدائرة دط

وحيث ان الدائرة اح : الدائرة دط :: $\overline{\text{اح}}^{2}$: $\overline{\text{دط}}^{2}$ يكون

القطع احـ : القطع دطه :: $\overline{\text{اح}}^{2}$: $\overline{\text{دط}}^{2}$ وهو المطلوب

(الدعوى الخامسة عشر النظرية)

كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها

(برهانها) أن يقال لو رسم على الدائرة مضلع منتظم لكانت مساحته مساوية لحاصل ضرب محيطه فى ربع قطر الدائرة المرسومة داخله كما تقرر ذلك فى النظرية

النظرية التاسعة فاذا كانت اضلاع هذا المضلع صغيرة جدا يتحد محيطه بمحيط الدائرة وحينئذ تكون مساحة الدائرة مساوية لمساحته أى لحاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها وهو المطلوب

(النتيجة الاولى)

(شكل ١٦٨ من اللوحة ٧)

كل قطع دائرة مساحته تساوى حاصل ضرب قوسه فى ربع قطره لان نسبة القطع ا ب ح الى الدائرة الكاملة كنسبة القوس ام ب الى المحيط الكامل ا ب ء كما تقرر ذلك فى المقالة الثانية أو كنسبة القوس ا م ب × ½ ح ا الى المحيط ا ب ء × ½ ح ا وحيث ان مساحة الدائرة = المحيط ا ب ء × ½ ح ا ينتج ان مساحة القطع ا ب ح = ام ب × ½ ح ا وهو المطلوب

(النتيجة الثانية)

اذا رمز بالرمزين م و مَ لمحيطى دائرتين مرموز لقطر أحدهما بالرمز ن والقطر الآخر بالرمز نَ حدث

م : مَ :: ن : نَ أو

م : ن :: مَ : نَ

أعنى أن النسبة بين أى محيط دائرة وقطرها واحدة فى سائر الدوائر والعادة أن يرمز بالحرف ط لمحيط الدائرة التى قطرها واحد فعلى هذا يكون

م : ن :: ط : ١ ومن هذه المناسبة ينتج أن

م = ط × ن = ط × ٢ نق = ٢ ط نق

(ونق رمز لنصف القطر)

وحيث ان كل دائرة مساحتها تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها

ينتج من ذلك أن الدائرة التى نصف قطرها نق

مساحتها = ٢ ط نق × $\frac{١}{٢}$ نق = ط نق^٢

(تنبيه)

اعلم أن مسئلة ايجاد خط مستقيم يساوى محيط دائرة معلومة تؤل الى ايجاد مقدار النسبة المرموز لها بالحرف ط أى الى ايجاد طول محيط الدائرة التى قطرها واحد

وكذلك مسئلة ايجاد مربع مكافئ لدائرة معلومة تؤل الى ايجاد مربع يكافئ مستطيلا قاعدته تساوى محيط الدائرة المعلومة وارتفاعه يساوى ربع قطرها

والى الآن لم يمكن ايجاد النسبة الحقيقية بين محيط الدائرة وقطرها وانما الذى أمكن ايجاد نسبة تقريبية فقط ولكن بواسطة الكسور المتسلسلة وحساب المتواليات صارت تلك النسبة فى أقصى درجة من التقريب بحيث لو وجدت النسبة الحقيقية فلا ثمرة فيها زيادة عما ذكر

وقبل أن يعلم حساب المتواليات على وجه الاتقان كان المهندسون المتقدمون يبذلون الوسع ما استطاعوا فى حل هذه المسئلة وأما الآن فقد صارت فى حيز الاهمال لكن لاجل تمرين المبتدئين وتوسيع ميادين افكارهم اجتهد من المهندسين المتقدمين مهندس يسمى ارشميدس وبين أن النسبة بين محيط الدائرة وقطرها محصورة بين $\frac{١}{٧}$ و ٣ و $\frac{١٠}{٧١}$ و ٣ أو بين $\frac{٧١}{٤٩٧}$ و ٣ و $\frac{٧٠}{٤٩٧}$ و ٣ فعلى هذا يكون $\frac{١}{٧}$ و ٣ أو $\frac{٢٢}{٧}$ مقدارا مقربا من النسبة المذكورة زائدا عنها باقل من $\frac{١}{٤٩٧}$ ولكونه أسهل من غيره كان هو المختار فى الاستعمال ومن المتقدمين مهندس يسمى ميتيوس استخرج مقدارا لهذه النسبة اشد قربا مما ذكروهو $\frac{٣٥٥}{١١٣}$ وبالجملة فقد استخرج بمعرفة المتأخرين من المهندسين مقدار ط بواسطة الكسور الاعشارية وقدموها الى درجة التقريب ما استطاعوا حتى وصلوا الى هذه الاعداد

٣٫١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢ وقدموا هذا الكسر الى الخانة المائة والعشرين بل الى الخانة المائة والاربعين وهذه الكسور التي تقدمت الى هذه الدرجة حصل بها التقريب الكافي كما لا يخفى وكثيرا ما يجري العمل في الحسابات باعتبار ط = ٣٫١٤١٥٩٢٦ وهذا المقدار أقل من النسبة الحقيقية باقل من جزء من عشرة ملايين فينتج من هذا ان هذا المقدار $\frac{٢٢}{٧}$ يزيد عن النسبة الحقيقية باقل من $\frac{١}{٧٩٠}$

(الدعوى السادسة عشر العملية)

(شكل ١٦٩ من اللوحة ٧)

اذا علم ضلعان منتظمان متشابهان أحدهما مرسوم داخل دائرة والآخر مرسوم عليها وكان المطلوب ايجاد سطح المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الشكل الداخل المعلوم ثم ايجاد سطح المضلع المنتظم المرسوم على الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع الشكل الخارج المعلوم فطريقة ذلك أن يقال

ليكن ا ب أحد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة و هـ و الموازي له هو احد اضلاع المضلع المنتظم المشابه له المرسوم على الدائرة ولتكن النقطة ح هي مركز تلك الدائرة فلو وصل الوتر ام ورسم المماسات ا ل و ب ك لكان الوتر ام هو أحد اضلاع المضلع المنتظم المرسوم داخل الدائرة الذي عدد اضلاعه ضعف عدد اضلاع المضلع المعلوم المرسوم داخل الدائرة وحينئذ فالخط ل ك الذي هو ضعف الخط ل م يكون هو أحد اضلاع المضلع المرسوم على الدائرة المشابه للمضلع الداخل الذي ضلعه ا م اذا تقرر ذلك يعلم انه يمكن اجراء العمل كما ذكر في الزاوية ا ح م على سائر الزوايا الاخر التي تساويها

فاذا رمز بالحرف ا لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه ا ب وبالحرف ب لمساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة

وبالحرف آ لمساحة المضلع المرسوم داخل الدائرة الذي ضلعه ام

وبالحرف ـَ لمساحة المضلع المشابه له المرسوم على الدائرة الذى ضلعه لك

فلايجاد مقدارى اَ و ـَ يقال

اولا حيث ان للمثلثين احد و احم رأسا مشتركة فى ا وارتفاعا واحدا يكون

احد : احم :: حد : حم وأيضا

احد : احم :: الشكل ا : الشكل اَ فينتج أن

ا : اَ :: حد : حم

وأيضا حيث ان للمثلثين احم و هحم رأسا مشتركة فى م وارتفاعا واحدا يكون

احم : هحم :: حا : حه

وأيضا احم : هحم :: الشكل اَ : الشكل ـَ فينتج أن

اَ : ـَ :: حا : حه

ويلزم من كون الخط اد موازيا للخط هم أن يكون

حا : حه :: حد : حم

وحيث ان حد : حم :: ا : اَ يكون

اَ : ـَ :: ا : اَ فينتج أن

$$\bar{ا} = \sqrt{ا \times \bar{ـ}}$$

أعنى ان مساحة الشكل اَ وسط متناسب بين مساحتى الشكلين المعلومين وهو المطلوب

وثانيا لايجاد مقدار ـَ يقال حيث ان للمثلثين حلم و حله رأسا

مشتركة

مشتركة في ح وارتفاعا مشتركا يكون

حلم : حله :: لم : له

ويلزم من كون الخط لح منصفا للزاوية هحم أن يكون

لم : له :: حم : حه كما تقرر ذلك في النظرية السابعة عشر من المقالة الثالثة وحيث ان حم = حا يكون

حم : حه :: حا : حه

ويلزم من كون الخط اد موازيا للخط هم أن يكون

حا : حه :: حد : حم وقد سبق أن

حد : حم :: ا : اَ فينتج أن

حلم : حله :: ا : اَ ومن هذه المناسبة ينتج أن

حلم : حلم + حله :: ا : ا + اَ

وحيث ان حلم + حله = حهم يكون

حلم : حهم :: ا : ا + اَ أو

٢ حلم : حهم :: ٢ ا : ا + اَ

وحيث ان ٢ حلم = حلك يكون

حلك : حهم :: ٢ ا : ا + اَ

وحيث ان حلك : حهم :: الشكل سَ : الشكل س يكون

سَ : س :: ٢ ا : ا + اَ

ومن هذه المناسبة ينتج أن

سَ = (٢ ا × س) / (ا + اَ) وحيث ان اَ = √(ا × س) يكون

سَ = (٢ ا × س) / (ا + √(ا × س)) وهو المطلوب

* (الدعوى السابعة عشر العملية) *

اذا كان المطلوب ايجاد نسبة تقريبية بين محيط الدائرة وقطرها فطريقة ذلك أن يقال لو فرض ان نصف قطرها = ١ لكان ضلع المربع المرسوم داخلها = $\sqrt{٢}$ كما تقرر ذلك فى تنبيه الدعوى الخامسة العملية وحيث ان ضلع المربع المرسوم على الدائرة مساو لقطرها يكون ضلع المربع المذكور مساويا للعدد ٢ ويلزم من هذا أن تكون مساحة المربع المرسوم داخل الدائرة مساوية للعدد ٢ ومساحة المربع المرسوم عليها = ٤ فاذا رمز بالحرف ا لمساحة المربع المرسوم داخل الدائرة وبالحرف ب لمساحة المربع المرسوم عليها يكون ا = ٢ و ب = ٤

وبمقتضى ما ذكر فى الدعوى العملية المتقدمة تكون مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة المرموز له بالحرف اَ هكذا

$$\text{اَ} = \sqrt{\text{ا} \times \text{ب}} = \sqrt{٢ \times ٤} = \sqrt{٨} = ٢٫٨٢٨٤٢٧١$$

وتكون مساحة المثمن المنتظم المرسوم على الدائرة المرموز له بالحرف بَ هكذا

$$\text{بَ} = \frac{٢\,\text{ا}\times\text{ب}}{\text{ا}+\sqrt{\text{ا}\times\text{ب}}} = \frac{٢\times٢\times٤}{٢+\sqrt{٨}} = \frac{١٦}{٢+\sqrt{٨}} = ٣٫٣١٣٧٠٨٥$$

وحيث علمت مساحة المثمن المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة المثمن المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما مساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم داخل الدائرة ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم على الدائرة ويلزم لذلك أن يفرض جديدا ان

ا = ٢٫٨٢٨٤٢٧١ و ب = ٣٫٣١٣٧٠٨٥

فينتج أن $\text{اَ} = \sqrt{\text{ا} \times \text{ب}} = ٣٫٠٦١٤٦٧٤$

و $\text{بَ} = \frac{٢\,\text{ا}\times\text{ب}}{\text{ا}+\text{اَ}} = ٣٫١٨٢٥٩٧٩$

وحيث

وحيث علمت مساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم داخل الدائرة
ومساحة السادس عشرى المنتظم المرسوم على الدائرة توجد بواسطتهما
مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ٣٢ فاذادووم على اجراء
العمل بهذه الكيفية توجد مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه ٦٤
ثم مساحة المضلع المنتظم الذى عدد اضلاعه ١٢٨ ثم مساحة المضلع
المنتظم الذى عدد اضلاعه ٢٥٦ وهكذا حتى لا يبقى الافرق يسير جدا
بين مساحة الشكل المرسوم داخل الدائرة ومساحة الشكل المرسوم
خارجها

وحيث ان الدائرة محصورة بين الشكلين والفرق بين مساحتى هذين الشكلين
يسير جدا لا يساوى جزأ من عشرة ملايين يعلم من ذلك انه يمكن أن تعتبر
مساحة احد هذين الشكلين مساوية لمساحة الدائرة وأن مساحة الدائرة
تساوى حاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها

وقد رقمت الخانات المتوافقة فى جدول هالك صورته

عدد الاضلاع	مساحة المضلع الداخل	مساحة المضلع الخارج
٤	٢ر٠٠٠٠٠٠٠	٤ر٠٠٠٠٠٠٠
٨	٢ر٨٢٨٤٢٧١	٣ر٣١٣٧٠٨٥
١٦	٣ر٠٦١٤٦٧٤	٣ر١٨٢٥٩٧٩
٣٢	٣ر١٢١٤٤٥١	٣ر١٥١٧٢٤٩
٦٤	٣ر١٣٦٥٤٨٥	٣ر١٤٤١١٨٤
١٢٨	٣ر١٤٠٣٣١١	٣ر١٤٢٢٢٣٦
٢٥٦	٣ر١٤١٢٧٧٢	٣ر١٤١٧٥٠٤
٥١٢	٣ر١٤١٥١٣٨	٣ر١٤١٦٣٢١
١٠٢٤	٣ر١٤١٥٧٢٩	٣ر١٤١٦٠٢٥
٢٠٤٨	٣ر١٤١٥٨٧٧	٣ر١٤١٥٩٥١
٤٠٩٦	٣ر١٤١٥٩١٤	٣ر١٤١٥٩٣٣
٨١٩٢	٣ر١٤١٥٩٢٣	٣ر١٤١٥٩٢٨
١٦٣٨٤	٣ر١٤١٥٩٢٥	٣ر١٤١٥٩٢٧
٣٢٧٦٨	٣ر١٤١٥٩٢٦	٣ر١٤١٥٩٢٦

فيعلم من ذلك أن سطح الدائرة = ٣ر١٤١٥٩٢٦ وحيث انه صار تقديم الكسر الاعشارى الى سابع خانة وترك البواقى حسبت الكسور بزيادة ترقيم خانة ليكون الناتج من الحساب فى غاية من التقريب

وحيث ان مساحة الدائرة مساوية لحاصل ضرب محيطها فى ربع قطرها اينتج من ذلك انه اذا كان نصف قطرها واحدا يكون نصف المحيط = ٣ر١٤١٥٩٢٦ وان كان قطرها واحدا يكون المحيط = ٣ر١٤١٥٩٢٦ فتبين أن مقدار ط الذى هو النسبة التقريبية بين محيط الدائرة وقطرها = ٣ر١٤١٥٩٢٦. وهو المطلوب

(امثلة)

(امثلة)

(المثال الاول)

أن يكون المطلوب ايجاد خط مستقيم يكافئ محيط دائرة قطرها معين

فطريقة ذلك أن يقسم قطر الدائرة المعلومة الى سبعة أقسام متساوية ثم يرسم مستقيم غير متناه ويؤخذ عليه بعد بقدر ربع القطر المعلوم ثم يكرر هذا البعد اثنين وعشرين مرة فيحصل المطلوب بالجليل من التقريب

(المثال الثانى)

أن يكون المطلوب ايجاد مربع يكافئ دائرة معلومة

فطريقة ذلك أن يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى محيط الدائرة المعلومة والآخر يساوى ربع قطرها فالوسط المتناسب المذكور يكون ضلع المربع المطلوب

أو يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى نصف محيط الدائرة المعلومة والآخر يساوى نصف قطرها فالوسط المتناسب الذى ينتج من هذه العملية يكون ضلع المربع المطلوب

أو يبحث عن الوسط المتناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى ربع محيط الدائرة المعلومة والآخر يساوى قطرها فالوسط المتناسب الذى ينتج من هذه العملية يكون ضلع المربع المطلوب

(المثال الثالث)

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تكافئ مربعا معلوما

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م لضلع المربع المعلوم وبالحرف ء للدائرة المطلوبة وبالحرف س لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{م}^{٢} = \text{ء} = \text{ط نق}^{٢} = \frac{٢٢}{٧} \times \text{نق}^{٢} \quad \text{فينتج أن}$$

$$\text{نق}^{٢} = \text{م}^{٢} : \frac{٢٢}{٧} = \frac{٧\text{م}^{٢}}{٢٢} = ٧\,\text{م} \times \frac{\text{م}}{٢٢} \quad \text{أى}$$

$$٧\,\text{م} : \text{نق} :: \text{نق} : \frac{\text{م}}{٢٢}$$

ويعلم من هذه المناسبة أن نصف قطر الدائرة المطلوبة وسط متناسب بين مستقيمين أحدهما يساوى سبعة أمثال ضلع المربع المعلوم والآخر يساوى جزأ من اثنين وعشرين جزأ من ضلع المربع المذكور

* (المثال الرابع) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار محيط الدائرة التى قطرها خمس أذرع

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف م للمحيط المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$م = ط \times ٥ = \frac{٢٢}{٧} \times ٥ = \frac{١١٠}{٧} = \frac{٥}{٧} + ١٥$$

أى ان المحيط المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعا وخمسة اسباع الذراع

* (المثال الخامس) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التى محيطها سبع وأربعون ذراعا وسبع ذراع

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ن للقطر المطلوب فعلى منطوق المثال يكون

$$\frac{١}{٧} + ٤٧ = ط \times ن = \frac{٢٢}{٧} \times ن$$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$$ن = \left(\frac{١}{٧} + ٤٧\right) : \frac{٢٢}{٧} = \frac{\left(\frac{١}{٧} + ٤٧\right)٧}{٢٢} = ١٥$$

أى ان القطر المطلوب يساوى خمسة عشر ذراعا

* (المثال السادس) *

أن يكون المطلوب معرفة مقدار مساحة الدائرة التى قطرها خمس اذرع

فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ء لمساحة الدائرة المطلوبة فعلى منطوق المثال يكون

$$ء = ط\, نق^{٢} = \frac{ط}{٤} \times ن^{٢} = \frac{٢٢}{٤ \times ٧} \times ٥^{٢}$$

أو $$ء = \frac{١١}{١٤} \times ٢٥ = \frac{٢٧٥}{١٤} = \frac{٩}{١٤} + ١٩$$

أى أن المساحة المطلوبة تساوى تسعة عشر ذراعا مربعا وتسعة اجزاء من أربعة عشر جزأ من الذراع المربع

* (المثال السابع) *

أن

أن يكون المطلوب معرفة مقدار قطر الدائرة التى مساحتها تسعة وثلاثين ذراعا مربعا وسبعين الذراع المربع فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف ق للقطر المطلوب وبالحرف نق لنصفه وبالحرف د للمساحة المعلومة فعلى منطوق المثال يكون

$\text{د} = \text{ط}\ \text{نق}^{2} = \frac{\text{ط}}{4} \times \text{ق}^{2} = \left(\frac{22}{7} \div 4\right) \times \text{ق}^{2}$ أو $\text{د} = \frac{11}{14} \times \text{ق}^{2}$ ومن هذه المعادلة ينتج أن

$\text{ق}^{2} = \text{د} : \frac{11}{14} = \frac{14\,\text{د}}{11} = \frac{14}{11}\left(39 + \frac{2}{7}\right)$ وان

$\text{ق} = \sqrt{\frac{14}{11}\left(39 + \frac{2}{7}\right)}$

ويعلم من ذلك انه لايجاد قطر الدائرة بعد معرفة مساحتها يلزم ان تضرب المساحة المعلومة فى أربعة عشر ويقسم حاصل الضرب على احدى عشر ثم يؤخذ جذر الناتج فيكون المتحصل من الجذر مساويا لمقدار القطر المطلوب

المثال الثامن

أن يكون المطلوب معرفة مقدار طول القوس الذى مقداره ٤٥ درجة و ٢٠ دقيقة بفرض ان نصف قطره ٤ و ٥ امتار فطريقة ذلك ان يبحث عن النسبة الكائنة بين هذا القوس وربع المحيط ثم تضرب هذه النسبة فى طول ربع المحيط فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

$٤٥ + ٢٠' = ٤٥ \times ٦٠' + ٢٠' = ٢٠' +$
$٢٧٠٠' = ٢٧٢٠'$ وربع المحيط $= ٩٠ \times ٦٠' =$
$٥٤٠٠'$

والنسبة الكائنة بين $٢٧٢٠'$ و $٥٤٠٠'$ $= \frac{٢٧٢٠}{٥٤٠٠} = \frac{٦٨}{١٣٥}$ من ربع المحيط وطول ربع المحيط $= \frac{\text{ط}}{٢} \times ٤$ و ٥ فاذن يكون طول

القوس المطلوب هكذا

س = $\frac{٦٨}{١٢٥}$ × $\frac{ط}{٢}$ × ٤ و ٥ = $\frac{٣٤}{١٢٥}$ × ط × ٤ و ٥

وصورة العملية بواسطة اللوغاريتم هكذا

لوغا ٣٤ = ١,٥٣١٤٧٨٩

لوغا ط = ٠,٤٩٧١٤٩٩

لوغا ٤ و ٥ = ٠,٧٣٢٣٩٣٨

مكمل لوغا ١٢٥ = ٧,٨٦٩٦٦٦٣

لوغا س = ٠,٦٣٠٦٨٨٩

فيكون س = ٤ و ٢٧٢٦ امتار

والمتروك في هذا المقدار أقل من جزء من عشرة الاف من المتر اى أقل من عشر المليمتر

(المثال التاسع)

أن يكون المطلوب ايجاد مساحة قطع دائرة نصف قطرها اثنا عشر مترا وقوسه يساوى ٦٠ درجة فطريق ذلك ان يبحث عن طول هذا القوس ثم يضرب الناتج في ربع القطر فينتج المطلوب

وصورة العملية هكذا

القوس : ٢ ط نق :: ٦٠° : ٣٦٠°

القوس = $\frac{٢ \text{ ط نق} \times ٦٠}{٣٦٠}$ = $\frac{\text{ط نق}}{٣}$ = $\frac{\text{ط} \times ١٢}{٣}$ = ٤ ط

والقطع = ٤ ط × ٦ = ٢٤ ط = ٧٥و٣٩٦٠ مترا مربعا وهو المطلوب

امثلة في جمع محيطات الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوى مجموع محيطين معلومين فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز مَ لاحد المحيطين المعلومين وبالرمز نقَ لنصف قطره

وبالرمز

وبالرمز مٌ للمحيط الآخر وبالرمز نقٌ لنصف قطره وبالحرف م للمحيط المطلوب وبالرمز نق لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

م = مَ + مً وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

و مً = ٢ ط نقً يكون

٢ ط نق = ٢ ط نقَ + ٢ ط نقً = ٢ ط (نقَ + نقً)

فينتج ان نق = نقَ + نقً

أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي مجموع نصفي قطري المحيطين المعلومين

المثال الثاني

أن يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوي فاضل محيطين معلومين فطريقة ذلك ان يبحث عن فاضل نصفي قطري المحيطين المعلومين فينتج نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الثالث

أن يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوي مجموع جملة محيطات معلومة فطريقة ذلك ان يبحث عن مستقيم يساوي مجموع انصاف اقطار المحيطات المعلومة فيكون هو نصف قطر المحيط المطلوب

المثال الرابع

أن يكون المطلوب ايجاد محيط دائرة يساوي الفاضل بين جملة محيطات معلومة وجملة محيطات كذلك فطريقة ذلك ان يبحث عن محيط يساوي جملة المحيطات الاول ثم يبحث عن محيط آخر يساوي جملة المحيطات الأخر ثم عن محيط يساوي فاضل هذين المحيطين فيكون هو المحيط المطلوب

أمثلة في جمع الدوائر وطرحها

المثال الاول

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوي مجموع جملة دوائر معلومة فطريقة ذلك ان يرمز بالرمز د١ لاحدى الدوائر المعلومة وبالرمز نق١ لنصف

قطرها وبالرمز $د_{٢}$ للدائرة الثانية المعلومة كذلك وبالرمز $نق_{٢}$ لنصف قطرها وبالرمز $د_{٣}$ للدائرة الثالثة وبالرمز $نق_{٣}$ لنصف قطرها وبالرمز د للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$د = د_{١} + د_{٢} + د_{٣} + \cdots\cdots \text{الخ}$$

وحيث ان

$$د_{١} = ط\,نق_{١}^{٢} \text{ و } د_{٢} = ط\,نق_{٢}^{٢} \text{ و } د_{٣} = ط\,نق_{٣}^{٢}$$

يكون $ط\,نق^{٢} = ط\,نق_{١}^{٢} + ط\,نق_{٢}^{٢} + ط\,نق_{٣}^{٢} = ط(نق_{١}^{٢} + نق_{٢}^{٢} + نق_{٣}^{٢})$

فينتج أن $نق^{٢} = نق_{١}^{٢} + نق_{٢}^{٢} + نق_{٣}^{٢}$

أعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مجموع مربعات انصاف اقطار الدوائر المعلومة

المثال الثانى

أن يكون المطلوب ايجاد دائرة تساوى فاضل دائرتين معلومتين فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز $د_{١}$ للدائرة الكبرى وبارمز $نق_{١}$ لنصف قطرها وبالرمز $د_{٢}$ للدائرة الصغرى وبالرمز $نق_{٢}$ لنصف قطرها وبالرمز د للدائرة المطلوبة وبالرمز نق لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$د = د_{١} - د_{٢}$ وحيث ان $د = ط\,نق^{٢}$ و $د_{١} = ط\,نق_{١}^{٢}$

و $د_{٢} = ط\,نق_{٢}^{٢}$ يكون

$$ط\,نق^{٢} = ط\,نق_{١}^{٢} - ط\,نق_{٢}^{٢} = ط\,(نق_{١}^{٢} - نق_{٢}^{٢})$$

فينتج ان $نق^{٢} = نق_{١}^{٢} - نق_{٢}^{٢}$

أعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى فاضل مربعى نصفى قطرى الدائرتين

الدائرتين المعلومتين

المثال الثالث

أن يكون المطلوب ايجاد الفاضل بين جملة دوائر معلومة وجملة دوائر كذلك فطريقة ذلك أن يبحث عن دائرة تساوى جملة الدوائر الاول ثم يبحث أيضا عن دائرة تساوى جملة الدوائر والاخر ثم دائرة تساوى فاضل هاتين الدائرتين فتكون هى الدائرة المطلوبة

أمثلة فى ضرب محيطات الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب انشاء محيط ضعفه فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون مَ = ٢ م

وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

يكون ٢ ط نقَ = ٢ × ٢ ط نق

ومن هذه المتساوية ينتج أن نقَ = ٢ نق

أعنى أن نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ضعف نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثانى

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب انشاء محيط يكون ثلاثة أمثاله فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

مَ = ٣ م وحيث ان م = ٢ ط نق

و مَ = ٢ ط نقَ يكون ٢ ط نقَ = ٣ × ٢ ط نق

ومن هذه المتساوية ينتج أن نقَ = ٣ نق

أعنى ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوى ثلاثة أمثال نصف قطر المحيط المعلوم

المثال الثالث

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب ايجاد محيط آخر يساوى المحيط المعلوم مضروبا فى كمية معينة مثل ك

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

مَ = م × ك وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

يكون ٢ ط نقَ = ٢ ط نق × ك

ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ = نق × ك

أعنى ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوى نصف قطر المحيط المعلوم مضروبا فى الكمية التى يراد ضرب المحيط المعلوم فيها

المثال الرابع

اذا علم محيط مثل م وكان المطلوب ايجاد محيط آخر يساوى المحيط المعلوم مقسوما على كمية معينة مثل ك

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر المحيط المعلوم وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق المثال يكون

مَ = $\frac{\text{م}}{\text{ك}}$ وحيث ان م = ٢ ط نق و مَ = ٢ ط نقَ

يكون ٢ ط نقَ = ٢ ط $\frac{\text{نق}}{\text{ك}}$ = ٢ ط × $\frac{\text{نق}}{\text{ك}}$

ومن هذه المتساوية ينتج أن نقَ = $\frac{\text{نق}}{\text{ك}}$

أعنى ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوى نصف قطر المحيط المعلوم مقسوما على الكمية التى يراد قسمة المحيط المعلوم عليها

المثال الخامس

أن يكون المطلوب انشاء محيط نسبته الى محيط معلوم كنسبة ٣ الى ٥

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز م للمحيط المعلوم وبالرمز نق لنصف قطره وبالرمز مَ للمحيط المطلوب وبالرمز نقَ لنصف قطره فعلى منطوق

المثال

المثال يكون   مَ : م :: ٣ : ٥

وحيث ان   مَ : م :: نقَ : نق

يكون   نقَ : نق :: ٣ : ٥

ومن هذه المناسبة ينتج أن نقَ = نق × ٣/٥

أعني ان نصف قطر المحيط المطلوب يساوي ثلاثة اخماس نصف قطر المحيط المعلوم

امثلة في ضرب الدوائر وتقسيمها

المثال الاول

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة ضعفها فطريقة ذلك

أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

دَ = ٢ د وحيث ان د = ط نق٢ و دَ = ط نقَ٢ يكون

ط نقَ٢ = ٢ ط نق٢ ومن هذه المتساوية ينتج أن نقَ٢ = ٢ نق٢

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ضعف مربع نصف قطر الدائرة المعلومة

المثال الثاني

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة ثلاثة أمثالها

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

دَ = ٣ د   وحيث ان د = ط نق٢ و دَ = ط نقَ٢

يكون ط نقَ٢ = ٣ ط نق٢ ومن هذه المتساوية ينتج ان نقَ٢ = ٣ نق٢

أعني ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة ثلاثة أمثال مربع نصف قطر

الدائرة المعلومة

المثال الثالث

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مضروبة فى كمية معينة مثل ه

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة و بالرمز دَ للدائرة المطلوبة و بالرمز نقَ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{دَ} = \text{د} \times \text{ه} \quad \text{وحيث ان} \quad \text{د} = \text{ط نق}^{2} \quad \text{و} \quad \text{دَ} = \text{ط نقَ}^{2}$$

يكون $\text{ط نقَ}^{2} = \text{ط نق}^{2} \times \text{ه}$ ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$\text{نقَ}^{2} = \text{نق}^{2} \times \text{ه}$$

أعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مضروبا فى الكمية التى يراد ضرب الدائرة المعلومة فيها

المثال الرابع

اذا علمت دائرة مثل د وكان المطلوب ايجاد دائرة أخرى تساوى الدائرة المعلومة مقسومة على كمية معينة مثل ه

فطريقة ذلك أن يرمز بالرمز نق لنصف قطر الدائرة المعلومة وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

$$\text{دَ} = \frac{\text{د}}{\text{ه}}$$ وحيث ان

$$\text{د} = \text{ط نق}^{2} \quad \text{و} \quad \text{دَ} = \text{ط نقَ}^{2}$$ يكون

$$\text{ط نقَ}^{2} = \text{ط} \frac{\text{نق}^{2}}{\text{ه}} = \text{ط} \times \frac{\text{نق}^{2}}{\text{ه}}$$ ومن هذه المتساوية ينتج أن

$$\text{نقَ}^{2} = \frac{\text{نق}^{2}}{\text{ه}}$$

اعنى

أعنى أن مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى مربع نصف قطر الدائرة المعلومة مقسوما على الكمية التى يراد تقسيم الدائرة المعلومة عليها

المثال الخامس

أن يكون المطلوب انشاء دائرة نسبتها الى دائرة معلومة كنسبة ٣ الى ٥ فطريقة ذلك أن يرمز بالحرف د للدائرة المعلومة وبالرمز نق لنصف قطرها وبالرمز دَ للدائرة المطلوبة وبالرمز نقَ لنصف قطرها فعلى منطوق المثال يكون

دَ : د :: ٣ : ٥

وحيث ان

دَ : د :: نقَ٢ : نق٢

يكون

نقَ٢ : نق٢ :: ٣ : ٥

ومن هذه المناسبة ينتج أن

نقَ٢ = نق٢ × ٣/٥

أعنى ان مربع نصف قطر الدائرة المطلوبة يساوى ثلاثة اخماس مربع نصف قطر الدائرة المعلومة

قد تم طبع الجزء الاول من النخبة العزية فى تهذيب الاصول الهندسية
بدار الطباعة العامرة المنشأة ببولاق مصر القاهرة فى ايام دولة
صاحب الرأى السديد حضرة أفنديناولى النعم محمد السعيد
ووافق تمام طبعه تحت ملاحظة ناظر المطبعة العامرة
المذكورة ذات المنافع المشهوره حضرة على
أفندى جرده بلغه الله مأموله وقصده فى اواسط
جمادة الاولى سنة ١٢٧٦ سنة ألف ومائتين
وست وسبعين من الهجرة النبوية
على صاحبها أفضل
الصلاة وازكى
التحية

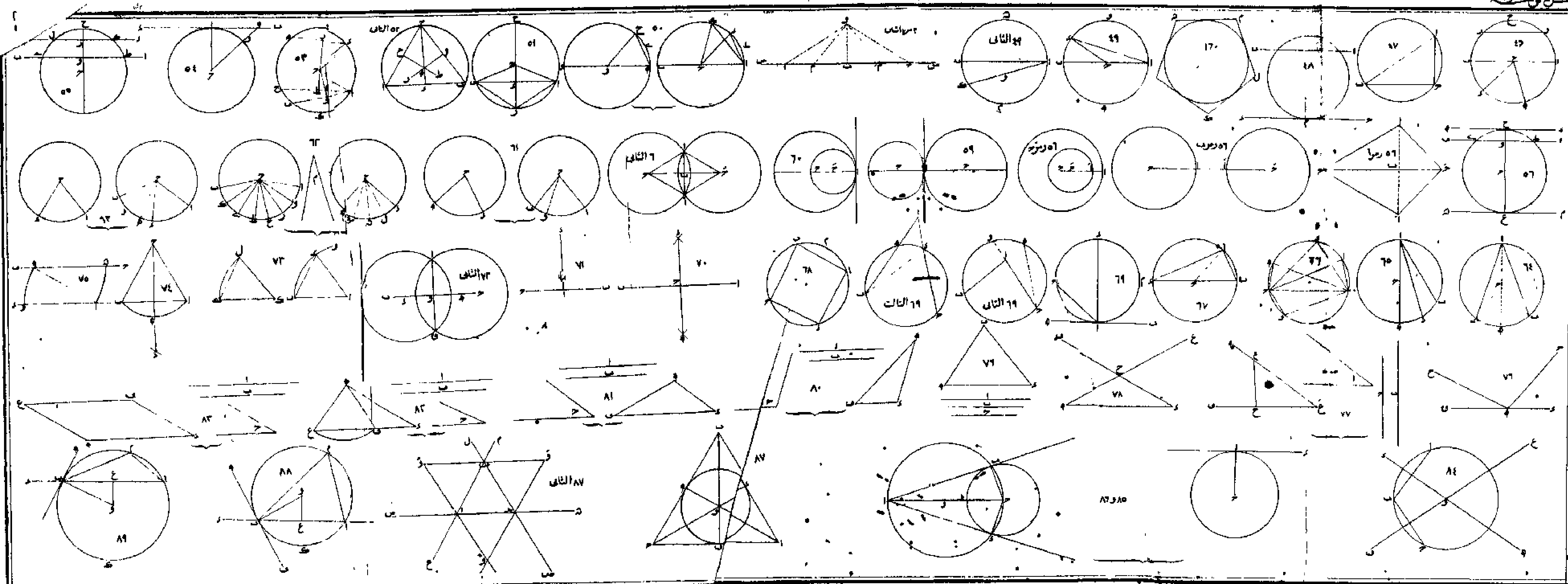
بلغت تكاليف هذا الكتاب تسعة وعشرون غرشا وعشرة فضة لاغير

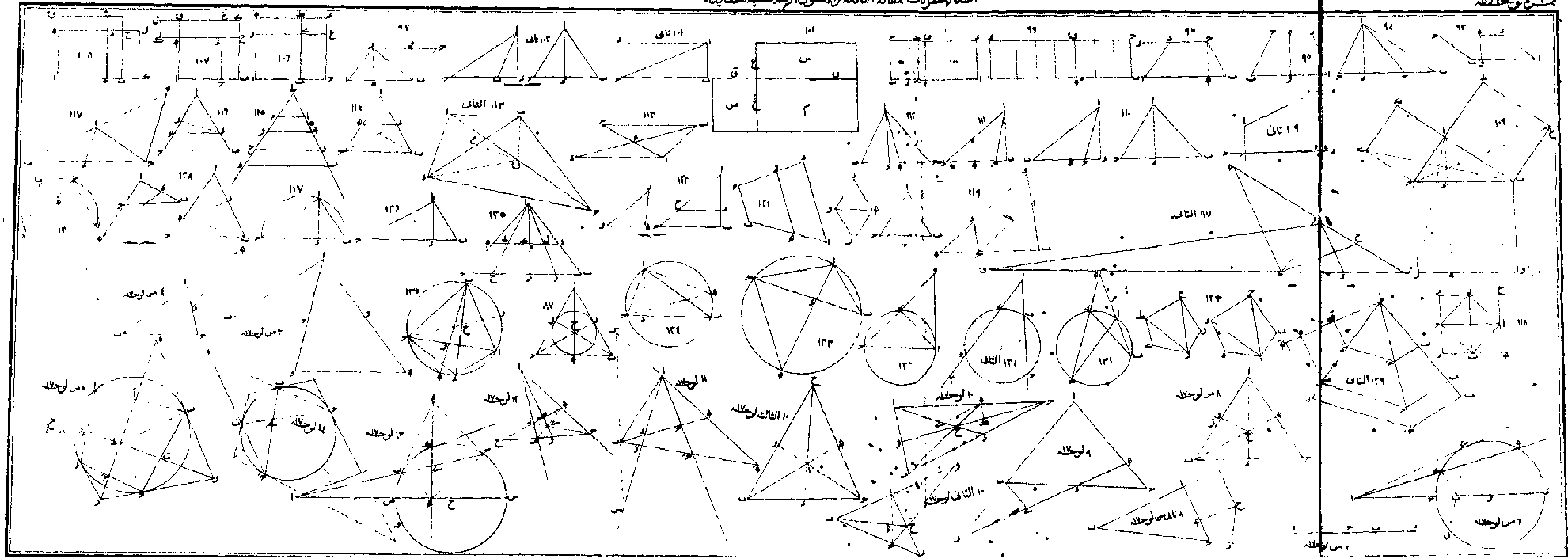
خالص الكمرك

اشكال المقالة الاولى من الاصول الهندسية الجديدة

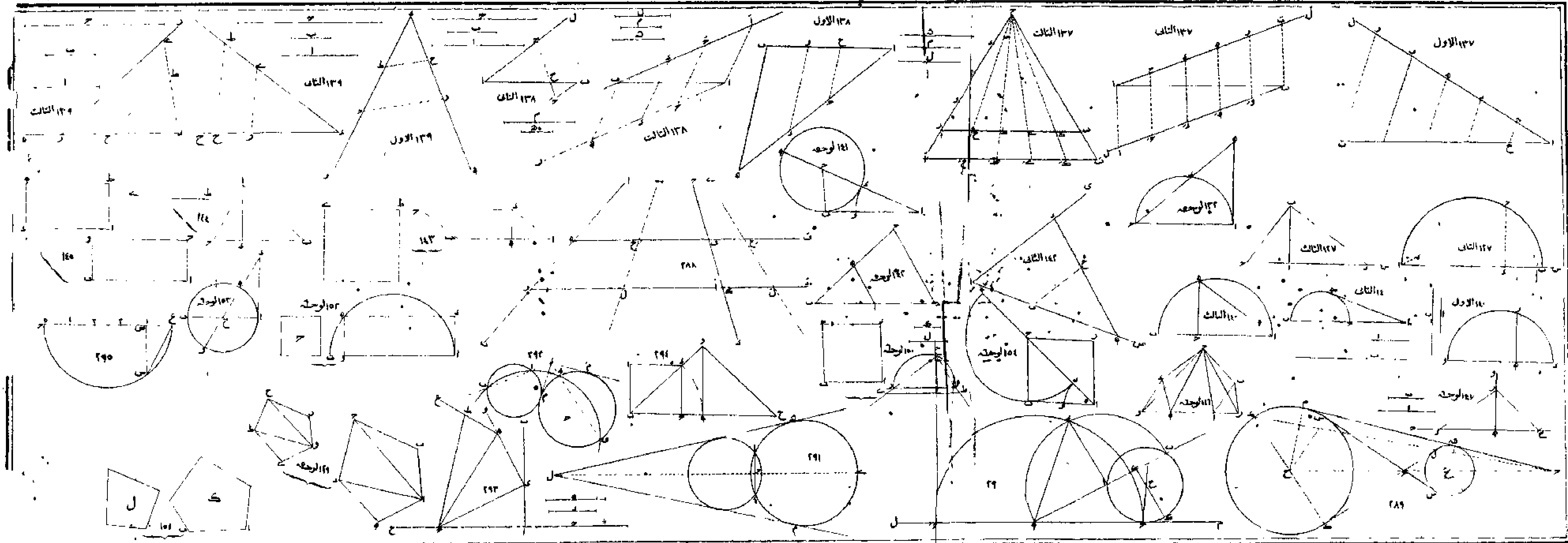
صحيفة لوح ٣١٣

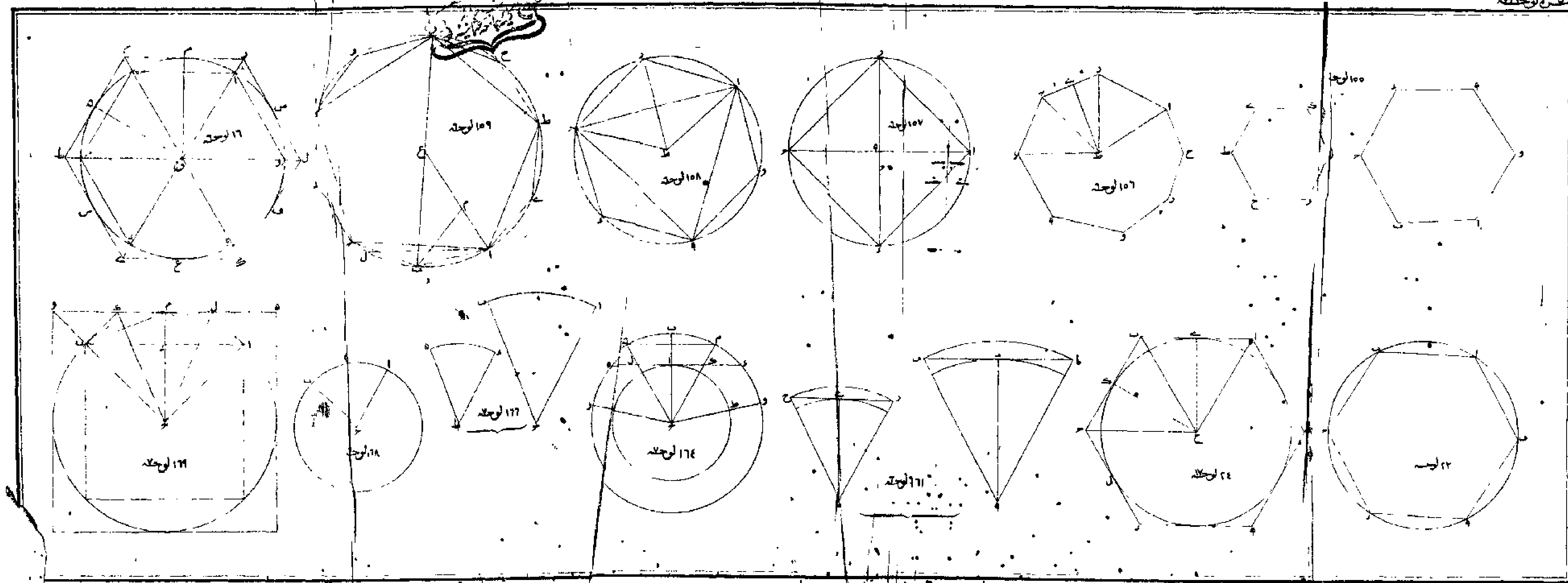
اشكال المقالة الثانية من الاصول الهندسية الجديدة





اشكال الدعاوى العملية المتعلقة بالمقالة الثالثة من الاصول الهندسية الجديدة





١٥٥ لوحه
١٥٦ لوحه
١٥٧ لوحه
١٥٨ لوحه
١٥٩ لوحه
١٦ لوحه
١٦١ لوحه
١٦٤ لوحه
١٦٧ لوحه
١٦٨ لوحه
١٦٩ لوحه